This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

TBF
P47

Library
of the
University of Wisconsin

Dynamische Vorgänge

beim

Anlauf von Maschinen

mit

besonderer Berücksichtigung von Hebemaschinen.

Von

Dr.-Ing. **Carl Pfleiderer.**

Mit 27 Figuren im Text.

Stuttgart

Verlag von Konrad Wittwer

1906.

Alle Rechte vorbehalten.

Hofbuchdruckerei Carl Hammer in Stuttgart.

117823
APR 1? 1908
TBF
.P47

GH5753

Inhalts-Verzeichnis.

Seite

Einleitung 1

Erster Abschnitt.

Die reduzierte Masse eines Triebwerks . . . 3

§ 1. Allgemeine Gleichung zur Bestimmung der reduzierten Masse . . . 3
§ 2. Veränderlichkeit des Wertes der reduzierten Masse 5
§ 3. Räderwerke 6
Zahnrädertriebwerke 8
§ 4. Rollenzüge 12

Zweiter Abschnitt.

Einfluss der Elastizität der Triebwerkteile auf die Beanspruchung des Triebwerks beim Anlauf . . 16

§ 1. Gesetz der Abhängigkeit der Formänderung von der Beanspruchung — Nachgiebigkeitsgrad eines Triebwerkteils 17
§ 2. Der reduzierte Nachgiebigkeitsgrad eines Triebwerks 18
§ 3. Der dynamische Begriff eines Triebwerks 20
§ 4. Dynamische Vorgänge beim Anlauf eines Triebwerks mit nur einem elastischen Zwischenglied 21
§ 5. Dynamische Vorgänge beim Anlauf eines Triebwerks mit zwei elastischen Gliedern 33
§ 6. Dämpfung der Schwingungen 36
§ 7. Allgemeines über die Vorgänge während des Anlaufs bei nicht konstanter Triebkraft 38

Dritter Abschnitt.

Einfluss der Elastizität der Gerüstkonstruktion auf die Beanspruchung des Triebwerks und der Gerüste . 40

§ 1. Gesetz der Abhängigkeit der Durchbiegung von der ihr entsprechenden Kraft — Nachgiebigkeitsgrad der Gerüstkonstruktion . . . 41
§ 2. Anlauf der Bühne ohne Last 42

Seite

Vierter Abschnitt.

Einfluss der freien Aufhängung der Last auf die Beanspruchung des Triebwerks und des Gerüstes . . 52

§ 1. Gesetz der Abhängigkeit der Beschleunigungskraft der Last von der Grösse der Ausschwingung — Nachgiebigkeitsgrad des Pendels . 52
§ 2. Anlauf bei verhältnismässig starrem Gerüste 53
§ 3. Anlauf bei vollbelastetem, nachgiebigem Gerüste 54

Fünfter Abschnitt.

Beispiele 59

1) Lastwinde 59
2) Katzenfahrwerk 66
3) Bühnenfahrwerk 73

Zusammenfassung 81

Einleitung.

Eine Maschine läuft an, wenn die zur Überwindung von Arbeits- und Massenwiderständen nötige Triebkraft ausgeübt wird. Dieser Triebkraft entspricht ein gewisser Spannungszustand der Maschine. Die Elastizität der Maschinenteile verbunden mit der Trägheit der in Bewegung zu setzenden Massen verhindert, dass der genannte Spannungszustand sofort in dem Augenblick entsteht, wo die Triebkraft einsetzt, weil infolge der Nachgiebigkeit des Triebwerks von den Motormassen vorher ein bestimmter Weg zurückzulegen ist. Die beim Motor liegenden Massen erlangen dadurch rasch eine gewisse Geschwindigkeit, solange die weiter abliegenden Triebwerkmassen kaum oder noch gar nicht in Bewegung sind. Es entstehen infolgedessen Geschwindigkeitsunterschiede, die unvermeidlich zu Schwingungen führen.

Die Entstehung dieser Schwingungen wird bei Hebemaschinen ausserdem noch beeinflusst durch die Elastizität der Gerüstkonstruktion — man denke an Laufkrane von grosser Spannweite — und durch die Aufhängung der Last am Lastseil. Hier geraten bei Beginn einer Fahrbewegung die Triebwerkmassen, die Gerüste und die Last je in Eigenschwingungen, die sich gegenseitig beeinflussen.

Auf Vorgänge dieser Art ist der ausführende Ingenieur schon lange aufmerksam geworden und ihre nachteiligen Folgen für die Beanspruchung des Triebwerks sind bekannt[1]); da aber eine eingehende Erforschung der erwähnten Erscheinungen bisher nur für einige Sondergebiete durchgeführt worden ist,[2]) so konnte man ihnen nur schätzungsweise dadurch Rechnung tragen, dass man die zulässige Anstrengung des Materials geringer wählte, als bei statischer Beanspruchung üblich war.[3])

Es ist der Zweck dieser Arbeit, diese Kraftwirkungen klarzulegen und vor allem einfache Mittel und Wege zur Bestimmung ihrer Einflüsse anzugeben, so dass es an Hand der aufgestellten Gleichungen stets möglich ist, sich in jedem einzelnen Fall Aufschluss über ihre Folgen zu verschaffen.

[1]) Siehe Ernst, Hebezeuge, z. B. 4. Aufl., S. 4.

[2]) Frahm: „Neue Untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen von Schiffsmaschinen mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzschwingungen". Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure 1902 S. 797 und 880 oder Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 6.

[3]) Vgl. Bach, Maschinenelemente, 9. Aufl., S. 45.

Eine Aufgabe der hierher gehörenden Art hatte auch schon Grashof in seiner Arbeit „Theorie der Elastizität“[1]) allerdings unter gewissen mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmenden Annahmen behandelt, nämlich die Berechnung der Spannung eines Förderseils beim Anlassen der Maschine. Seiner Lösung lag jedoch die auch hier verwertete Vorstellung zugrunde, dass ein nachgiebiges Verbindungsglied von geringer Masse, nämlich das Förderseil die Ursache der Schwingungen sei. Die gleiche Aufgabe hatte v. Bach, dessen Schüler ich bin, in seiner Vorlesung über Elastizität und Festigkeit vorgetragen und zwar in der Weise erweitert, dass er noch eine Feder zwischen Seil und Förderschale als vorhanden annahm.

Eine zahlenmässige Vorstellung von dem Einfluss der Schwingungen erhält man durch die im letzten Abschnitt eingehend durchgerechneten Beispiele. Zur Durchführung dieser Rechnungen war die Bestimmung der reduzierten Masse des Triebwerks, d. h. derjenigen Masse, die man sich am Angriffspunkt der Kraft vereinigt zu denken hat, wenn ihr Trägheitswiderstand gleich dem des Triebwerks sein soll, notwendig, denn bezeichnet p_0 die Beschleunigung des Angriffspunktes der Kraft, m die auf diesen Punkt reduzierte Masse des Triebwerks, so ist die beim Anlauf des unbelasteten Triebwerks aufzuwendende Kraft

$$P_m = m p_0. \tag{1}$$

Diese reduzierte Masse m musste zunächst für die verschiedenen Triebwerkarten bestimmt und da sie sich von dem üblichen Begriff der reduzierten Masse wesentlich dadurch unterscheidet, dass für ihre Grösse auch die im Triebwerk erzeugten Reibungsverluste massgebend sind, ihr Verhalten näher untersucht werden. Durch diese notwendigen Vorarbeiten, die im ersten Abschnitt folgen, erreichte der zu bewältigende Stoff einen sehr bedeutenden Umfang, so dass es mit Rücksicht auf den der Arbeit vorgeschriebenen, engen Rahmen nötig wurde, die Untersuchungen in gedrängter Form durchzuführen. Die berechneten Beispiele zeigen allerdings, dass im allgemeinen die reduzierten Massen der Triebwerkteile gegenüber denjenigen des Motors und den an der Verwendungsstelle der Kraft vorhandenen verschwindend klein sind, so dass für praktische Rechnungen die Vernachlässigung der Massen von Zahnrädern, Rollen u. s. f. wohl zulässig ist. Jedoch lag es im Interesse einer einwandfreien Untersuchung, zunächst den Einfluss sämtlicher Massen ziffernmässig darzutun, um daran die Zulässigkeit der gemachten Vernachlässigung zu beweisen.

[1]) Erschienen im Jahr 1878.

Erster Abschnitt.

Die reduzierte Masse eines Triebwerks.

§ 1. Allgemeine Gleichung zur Bestimmung der reduzierten Masse.

Der folgenden Untersuchung ist ein Triebwerk allgemeiner Art zugrunde gelegt. Es ist also zunächst gleichgültig, ob die Triebwerkmassen sich in geradlinigen oder kreisförmigen Bahnen bewegen. Das Triebwerk bestehe aus $n + 1$ hintereinander angeordneten Triebwerkelementen, die sich mit verschiedener Übersetzung bewegen. Es bezeichne

P_m die zur Beschleunigung der vorhandenen Massen nötige Triebkraft,

$p_0, p_1, p_2 \ldots p_k \ldots p_n$ je die Beschleunigung eines auf jedem der vorhandenen $n + 1$ Triebwerkelemente gewählten Punktes. Der auf dem ersten Element gewählte Punkt sei der Angriffspunkt der Kraft P_m; p_0 ist also die Beschleunigung des Angriffspunkts der Triebkraft,

$m'_0, m'_1, m'_2 \ldots m'_k \ldots m'_n$ je die Masse der einzelnen Triebwerkelemente, bezogen auf den gewählten Punkt,

$i_1 = \frac{p_1}{p_0}, i_2 = \frac{p_2}{p_0}, \ldots i_k = \frac{p_k}{p_0}, \ldots i_n = \frac{p_n}{p_0}$ je das Übersetzungsverhältnis zwischen dem gewählten Punkt und dem Angriffspunkt der Kraft,

$\eta_0, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{k-1} \ldots \eta_n$ je den Wirkungsgrad des Triebwerks bis zum 1ten, 2ten, 3ten, ... $k$ten ... $(n + 1)$ten Triebwerkelement.

Zunächst werde der Massenwiderstand des beliebigen, $(k+1)$ten Triebwerkelementes bestimmt. Die Masse m'_k bewegt sich mit der Beschleunigung p_k, wenn an ihr die Kraft angreift

$$\mathfrak{P}_k = m'_k p_k.$$

Da nun für jede Art der Kraftübertragung die Kräfte proportional der Übersetzung und umgekehrt proportional dem Wirkungs-

grad sind, so beträgt der der Kraft $\mathfrak{P}_k$ entsprechende Teil der Triebkraft P_m

$$P_k = \mathfrak{P}_k \frac{i_k}{\eta_k} = m'_k p_k \frac{i_k}{\eta_k}$$

oder da

$$p_k = p_0 i_k$$

$$P_k = m'_k \frac{i^2_k}{\eta_k} p_0. \tag{2}$$

Setzt man nun hierin

$$m_k = m'_k \frac{i^2_k}{\eta_k}, \tag{3}$$

so dass

$$P_k = m_k p_0,$$

so erhellt aus dem Vergleich mit Gl. (1) S. 2, dass m_k die reduzierte Masse des $(k+1)$ten Triebwerkelementes ist, d. h. diejenige Masse, die am Angriffspunkt der Kraft vereinigt beim Anlauf des Triebwerks denselben Beschleunigungswiderstand entgegensetzt, wie die Masse des $(k+1)$ten Triebwerkelementes.

Nach Gl. (2) ändert sich der Massenwiderstand eines Triebwerkteils mit dem Quadrat der Übersetzung bis zu demselben. Da die gemachten Voraussetzungen ganz allgemeiner Art sind, so gilt dieses Gesetz für sämtliche Triebwerkarten, also für Räderwerke, ebenso wie für Rollenzüge oder Kurbelgetriebe. Mit Rücksicht auf den besonderen Zweck dieser Arbeit ist nur den Räderwerken und Rollenzügen Beachtung geschenkt.

Ersetzt man in Gl. (2) den Index k nacheinander durch die Indices 0 bis n, so ergeben sich die zur Überwindung des Trägheitswiderstands der einzelnen Triebwerkelemente erforderlichen Triebkräfte:

$$\begin{aligned}
P_0 &= m'_0 p_0 \frac{i^2_0}{\eta_0} = m'_0 p_0 \frac{1}{\eta_0} \\
P_1 &= m'_1 p_0 \frac{i^2_1}{\eta_1} \\
P_2 &= m'_2 p_0 \frac{i^2_2}{\eta_2} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
P_n &= m'_n p_0 \frac{i^2_n}{\eta_n}.
\end{aligned}$$

Die beim Anlauf des Triebwerks zur Massenbeschleunigung erforderliche Kraft beträgt also:

$$P_m = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n$$

$$P_m = p_0 \left(\frac{m'_0}{\eta_0} + m'_1 \frac{i^2_1}{\eta_1} + m'_2 \frac{i^2_2}{\eta_2} + \ldots + m'_n \frac{i^2_n}{\eta_n} \right). \tag{4}$$

Hieraus ergibt sich zugleich der Ausdruck für die reduzierte Masse m des Triebwerks, denn vergleicht man die Gleichungen (1) S. 2 und Gl. (4) S. 4, so folgt:

$$(5) \qquad m = \frac{m'_0}{\eta_0} + \frac{m'_1}{\eta_1} i^2_1 + \frac{m'_2}{\eta_2} i^2_2 + \ldots + \frac{m'_n}{\eta_n} i^2_n.$$

§ 2. Veränderlichkeit des Wertes der reduzierten Masse.

Die Gleichungen (3) und (5) zeigen, dass die reduzierte Masse eines Triebwerks vom Wirkungsgrad der einzelnen Triebwerkteile, also von den Reibungswiderständen abhängig ist. Durch Versuche von Stribeck u. a. ist nun die Tatsache festgestellt, dass die Reibungsverluste in den Lagern mit der Geschwindigkeit und mit der Belastung sich sehr stark ändern. Ausserdem erhöht auch die vorhergegangene Betriebspause die Reibungswiderstände beim Anlauf wesentlich.

Daraus geht hervor, dass die reduzierte Masse eines Triebwerks einen veränderlichen Wert besitzt. Diese Veränderlichkeit tritt noch mehr hervor, wenn man auch diejenigen Fälle in Betracht zieht, bei denen die Bewegung ohne Zufuhr von Energie vom Motor aus vor sich geht, z. B. das Senken einer Last mit einer Winde ohne Selbsthemmung oder das Auslaufen einer Maschine. Es ist klar, dass bei Betrachtung dieser Bewegungsarten die Wirkungsgrade in den Gleichungen (2) bis (5) nicht mehr in den Nenner, sondern in den Zähler zu setzen sind. Auch sind jetzt die Werte der Wirkungsgrade andere. Dies zeigt die folgende einfache Betrachtung.

Bezeichnet für eine Hubwinde

Q die Last,

R bezw. R' die der Last proportionalen Reibungswiderstände für den Fall des Lasthebens bezw. Lastsenkens,

so beträgt der Wirkungsgrad des Triebwerks beim Aufwinden der Last:

$$(6) \qquad \eta = \frac{Q}{Q + R}$$

und beim Senken der Last

$$(7) \qquad \eta' = \frac{Q - R'}{Q}.$$

Die Grössen R und R' sind in der Regel voneinander verschieden, als gleich können sie nur in bestimmten Fällen, z. B. bei einer Schnecke oder Schraube von geringer Steigung angesehen werden. Um einigen Einblick in diese Verhältnisse zu bekommen, nehmen wir jedoch R und R' auch hier als gleich an und erhalten

dann durch Elimination von R und R' aus Gl. (6) und (7), wobei auch die Grössen Q und Q' ausfallen:

$$\eta' = \frac{2\eta - 1}{\eta}. \tag{8}$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass η und η' stets voneinander verschieden sind, ausgenommen den Fall $\eta = \eta' = 1$. Die der Gl. (8) entsprechende Kurve ist die in Fig. 1 gezeichnete Hyperbel. Der Verlauf der Kurve zeigt, dass stets $\eta' < \eta$ und dass mit abnehmendem η sich η' sehr rasch dem Werte 0 nähert, der mit $\eta = 0{,}5$ erreicht ist.

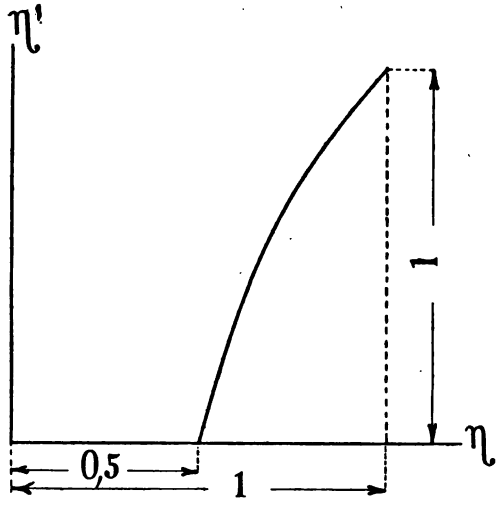

Fig. 1.

Hieraus und aus dem schon erwähnten Umstande, dass in den Gleichungen (2) bis (5) beim Durchgang der Kraft in umgekehrter Richtung durch das Triebwerk die Koeffizienten η_0 bis η_∞ im Zähler stehen, folgt, dass der Wert der reduzierten Masse beim Auslauf stets kleiner ist als beim Anlauf oder mit anderen Worten, dass die Werte der zu beschleunigenden Triebwerkmassen stets grösser sind als diejenigen der zu verzögernden.

Wie die späteren Untersuchungen zeigen, treten auch beim Anlauf einer Maschine infolge der sich einstellenden Schwingungen stets Perioden der Verzögerung auf, jedoch ohne dass sich der Kraftdurchgang in umgekehrter Richtung vollzieht. Während der Anlaufperiode ändern demnach die reduzierten Massen ihren Wert nur infolge der Abhängigkeit der Wirkungsgrade von der Umlaufszahl, also nur in beschränktem Masse. Im Interesse der Einfachheit bleiben diese Änderungen bei den folgenden Untersuchungen unberücksichtigt.

§ 3. **Räderwerke.**

Unter Räderwerken werden alle diejenigen Triebwerke verstanden, in denen die Triebwerkmassen rotierende Bewegungen ausführen. Die einzelnen Triebwerkelemente können sein: Zahnräder, Schnecke und Rad, Reibungsräder, Seil- und Riemscheiben.

Für den Fall der Reibungsräder, Seil- oder Riemscheiben wird stets ein Zusammenarbeiten ohne Gleiten vorausgesetzt.

Die auf jedem einzelnen Triebwerkelement gewählten Punkte, die mit dem Angriffspunkt der Kraft sich nach den in § 1 S. 3 bezeichneten Übersetzungsverhältnissen $i_1, i_2 \ldots i_n$ bewegen sollen, wählen wir auf jedem Vorgelege im Abstand $r = 1$ cm von der Wellenmitte. Damit können wir setzen

$$(9)\qquad \begin{cases} P_m = P_m \cdot 1 = P_m \cdot r = M_m \\ P_k = P_k \cdot 1 = P_k \cdot r = M_k \\ m = m \cdot 1^2 = m \cdot r^2 = \Theta \\ m_k = m_k \cdot 1^2 = m_k \cdot r^2 = \Theta_k \\ m_k' = m_k' \cdot 1^2 = m_k' \cdot r^2 = \Theta_k' \\ i_k = \dfrac{p_k}{p_0} = \dfrac{r\frac{dw_k}{dt}}{r\frac{dw_0}{dt}} = \dfrac{dw_k}{dw_0} = \dfrac{w_k}{w_0} \\ p_0 = \dfrac{p_0}{1} = \dfrac{p_0}{r} = \dfrac{dw_0}{dt}, \end{cases}$$

also an Stelle der Kräfte die Momente, der Massen die Trägheitsmomente und der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen die Winkelgeschwindigkeiten und Winkelbeschleunigungen.

In den Gleichungen (9) bezeichnet

M_m das zur Überwindung des Trägheitswiderstandes der Triebwerkmassen erforderliche Antriebmoment,

M_k den zur Beschleunigung des $k$ten Vorgeleges nötigen Teil von M_m,

Θ das Trägheitsmoment der auf den Angriffspunkt der Kraft reduzierten Masse des Triebwerks in bezug auf die Motorachse, mit anderen Worten, das auf die Antriebwelle reduzierte Trägheitsmoment der Triebwerkmassen,

Θ_k' das Trägheitsmoment der Massen des $(k+1)$ten Vorgeleges in bezug auf die Achse desselben,

Θ_k den auf die Motorwelle reduzierten Wert von Θ_k',

w_k die Winkelgeschwindigkeit des $(k+1)$ten Vorgeleges zur Zeit t,

i_k das Übersetzungsverhältnis der $(k+1)$ten Welle zur Motorwelle.

Mit den Gleichungen (9) ergeben sich die folgenden Beziehungen aus Gl. (2)

$$(10)\qquad M_k = \Theta_k' \frac{i^2_k}{\eta_k} \frac{dw_0}{dt},$$

aus Gl. (3)

$$(11) \qquad \Theta_k = \Theta'_k \frac{i^2_k}{\eta_k},$$

aus Gl. (4)

$$(12) \qquad M = \frac{dw_0}{dt}\left(\frac{\Theta'_0}{\eta_0} + \frac{\Theta'_1}{\eta_1} i^2_1 + \frac{\Theta'_2}{\eta_2} i^2_2 + \ldots + \frac{\Theta'_n}{\eta_n} i^2_n\right),$$

aus Gl. (5)

$$(13) \qquad \Theta = \frac{\Theta'_0}{\eta_0} + \frac{\Theta'_1}{\eta_1} i^2_1 + \frac{\Theta'_2}{\eta_2} i^2_2 + \ldots + \frac{\Theta'_n}{\eta_n} i^2_n.$$

Gl. (10) gibt die Möglichkeit, sich über die Grösse des Massenwiderstands irgend eines Getriebeteils unmittelbar Aufschluss zu verschaffen, wenn man das Trägheitsmoment Θ'_k desselben in bezug auf die zugehörige Wellenachse, den Wirkungsgrad η_k des Triebwerks bis zu dem Getriebeteil und die Grösse i_k der Übersetzung kennt. Durch welche Triebwerkarten diese Übersetzung erreicht wird, spielt hierbei keine Rolle.

Wie man aus Gl. (10) oder (11) erkennt, ändert sich der Einfluss der einzelnen Vorgelege mit dem Quadrat der Übersetzung. Die bei Räderwerken im allgemeinen übliche Übersetzung ins Langsame bedingt also eine rasche Abnahme des Einflusses der Massen der einzelnen Vorgelege.

Zahnrädertriebwerke.

Zahnräder finden bei Arbeitsmaschinen am häufigsten Verwendung als Mittel zur Kraftübertragung. Auch ist bei ihnen seit Einführung des elektrischen Betriebs die Verwendung sehr grosser Geschwindigkeiten üblich, die einen vielleicht nicht zu vernachlässigenden Massenwiderstand der Räder erwarten lassen. Mit Rücksicht hierauf sind im folgenden zur Berechnung der Trägheitsmomente von Zahnrädern allgemeine Formeln entwickelt, die das Trägheitsmoment in Funktion von Teilung, Zähnezahl und Zahnbreite ausdrücken.

Dabei sind zwei Klassen von Rädern unterschieden, und zwar vollwandige Ritzel mit glatten Stirnflächen und Räder mit vier Armen von $+$- oder $\perp$ förmigen Querschnitten. Für Räder von grösserer Armzahl sind die entwickelten Formeln auch mit genügender Genauigkeit verwendbar, weil stets der Einfluss des Radkranzes überwiegt und Kranz und Arme in der Regel mit steigender Armzahl schwächer gehalten werden.

Es bezeichne

t die Zahnteilung in cm,
ψt die Zahnbreite in cm,
z die Zähnezahl,

ϱ den Teilkreishalbmesser in cm,
γ das spezifische Gewicht des Radmaterials in kg/ccm,
$g = 981$ cm die Erdbeschleunigung.

a) Vollwandige Ritzel. Der Einfluss der Bohrung auf das Trägheitsmoment ist so gering, dass es zulässig ist, das Ritzel als voll zu betrachten. Ferner wird angenommen, dass der Einfluss des Zahnkopfes, d. h. des ausserhalb des Teilzylinders liegenden Teils des Zahnes dadurch berücksichtigt werden kann, dass man den innerhalb des Teilzylinders liegenden Teil der Zahnlücke als ausgefüllt behandelt. Es ergibt sich dann das Trägheitsmoment eines Ritzels als dasjenige eines vollwandigen Zylinders vom Halbmesser $\varrho = \frac{z\,t}{2\,\pi}$ und der Höhe gleich der Zahnbreite ψt

$$\Theta = \pi\,\psi\,t\left(\frac{z\,t}{2\,\pi}\right)^4 \frac{\gamma}{2g}\,^{1}) = \frac{1}{32\,.\,\pi^3}\,t^5\,z^4\,\psi\,\frac{\gamma}{g}.$$

Mit $\gamma = 0{,}00725$, $g = 981$ cm erhält man also für Ritzel aus Gusseisen in kgcm

$$(14)\quad \Theta_g = \frac{73}{10^{10}}\,t^5\,z^4\,\psi$$

und entsprechend für Ritzel aus Stahl mit $\gamma = 0{,}00786$

$$(15)\quad \Theta_s = \frac{8}{10^9}\,t^5\,z^4\,\psi.$$

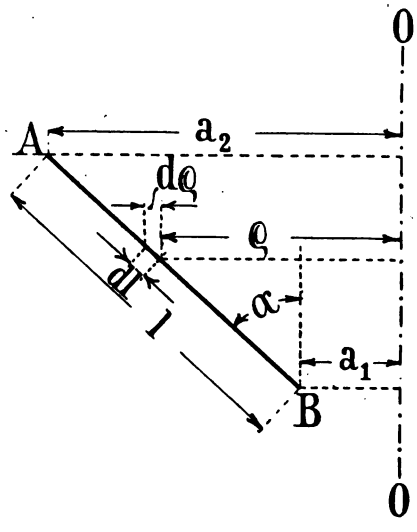

Fig. 2.

b) Zahnräder mit Armen. Bei Berechnung des Trägheitsmomentes der mit Armen versehenen Zahnräder beachten wir, dass der Einfluss der Nabe sehr gering ist. Diese wird deshalb genügend in der Weise berücksichtigt, dass die Radarme bis zur Radachse verlängert gedacht werden. Das Trägheitsmoment der Arme ergibt sich mit Hilfe der nachstehend entwickelten Formel.

---

[1]) Das Trägheitsmoment eines Zylinders vom Halbmesser r und der Länge l ergibt sich wie bekannt aus

$$\Theta = \int_0^r dm\,x^2 = \int_0^r 2\,\pi\,x\,dx\,l\,\frac{\gamma}{g}\,x^2 = 2\,\pi\,l\,\frac{\gamma}{g}\int_0^r x^3\,dx$$

$$= 2\,\pi\,l\,\frac{r^4}{4}\,\frac{\gamma}{g} = \pi\,l\,r^4\,\frac{\gamma}{2g}.$$

Der Stab $AB = l$ vom konstanten Querschnitt F habe gegen die Drehachse OO die durch die Bezeichnungen der vorstehenden Figur 2 bestimmte Lage.[1]) Sein Trägheitsmoment erhält man aus

$$\Theta = \int_{a_1}^{a_2} F\,dl\,\frac{\gamma}{g}\,\varrho^2 = F\,\frac{\gamma}{g}\int_{a_1}^{a_2}\varrho^2\,\frac{d\varrho}{\sin\alpha} = \frac{F\gamma}{g\sin\alpha}\int_{a_1}^{a_2}\varrho^2\,d\varrho$$

$$= \frac{F\gamma}{g\sin\alpha}\,\frac{a_2^3 - a_1^3}{3} = \frac{F\gamma}{3g}\,\frac{a_2 - a_1}{\sin\alpha}\left(a_2^2 + a_2\,a_1 + a_1^2\right)$$

oder weil

$$\frac{a_2 - a_1}{\sin\alpha} = l$$

$$\Theta = \frac{F\gamma l}{3g}\left(a_2^2 + a_2\,a_1 + a_1^2\right).$$

Da der Ausdruck $F\gamma l$ das Gewicht G des Stabes AB darstellt, so wird

(16a) $$\Theta = \frac{G}{3g}\left(a_2^2 + a_2\,a_1 + a_1^2\right).$$

Mit $a_1 = 0$ ergibt sich

(16) $$\Theta = a_2^2\,\frac{F\gamma l}{3g}.$$

Die Arme, die sich im allgemeinen nach aussen verjüngen, fassen wir als Stäbe mit konstantem Querschnitt auf und legen der

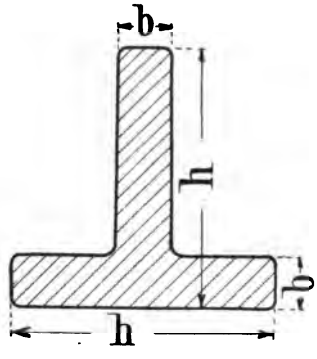

Fig. 3.

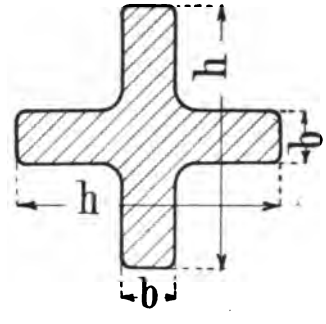

Fig. 4.

Berechnung den mittleren Armquerschnitt zugrunde.

---

[1]) Die Lage des Stabes AB ist in Fig. 2 deshalb nicht senkrecht zur Drehachse OO gewählt, weil die aus diesen allgemeinen Verhältnissen sich ergebende Gleichung (16a) auch zur Berechnung des Trägheitsmomentes der Gerüste von Drehkranen aus der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Gerüststäbe verwendet werden kann. Es ist dadurch die Anwendung der Ergebnisse der Abschnitte II bis IV auch auf Drehkrane möglich.

Die Abmessungen des letzteren (s. Fig. 3 und 4) wählen wir zu

$$h = \psi t, \quad b = 0{,}5\, t.$$

Damit ergibt sich für den Inhalt des Querschnitts

$$F = b\,(2\,h - b) = 0{,}5\, t\,(2\,\psi t - 0{,}5\, t) = 0{,}5\, t^2\,(2\,\psi - 0{,}5).$$

Wählt man die Stärke des Zahnkranzes zu $0{,}5\, t$, die Höhe des Zahnfusses zu $0{,}4\, t$, so erhält man die Armlänge

$$a_2 = \frac{z\,t}{2\,\pi} - \left(0{,}5\, t + 0{,}4\, t\right) = t\left(\frac{z}{2\,\pi} - 0{,}9\right),$$

womit Gl. (16) für das Trägheitsmoment der 4 Arme ergibt

$$4\,\Theta_a = 4\,\frac{0{,}5\, t^3\,(2\,\psi - 0{,}5)\,\gamma}{3\,g}\, t^3\left(\frac{z}{2\,\pi} - 0{,}9\right)^3$$

oder

$$(17) \qquad 4\,\Theta_a = 0{,}0027\, t^5\left(2\,\psi - 0{,}5\right)\left(z - 5{,}7\right)^3\,\frac{\gamma}{g}.$$

Wir nehmen wieder an, dass der Einfluss des Zahnkopfes genügend berücksichtigt ist, wenn man die Zahnlücke bis zum Teilzylinder als ausgefüllt betrachtet. Damit berechnet sich das Trägheitsmoment des Zahnkranzes als dasjenige eines einfachen Kreisrings von der Stärke $0{,}9\, t$, der Höhe ψt und dem äusseren Halbmesser $\varrho = \frac{z\,t}{2\,\pi}$, also als Unterschied der Trägheitsmomente zweier Vollzylinder (s. Fussbemerkung S. 9):

$$\Theta_k = \pi\,\psi t\left(\frac{z\,t}{2\,\pi}\right)^4\frac{\gamma}{2\,g} - \pi\,\psi t\left(\frac{z\,t}{2\,\pi} - 0{,}9\, t\right)^4\frac{\gamma}{2\,g}$$

$$(18) \qquad \Theta_k = 0{,}023\,\psi t^5\,\frac{\gamma}{g}\left(z^3 - 8{,}5\, z^2 + 32\, z - 45\right).$$

Mit den Gleichungen (17) und (18) ergibt sich als Trägheitsmoment des Rades:

$$\Theta = 4\,\Theta_a + \Theta_k = 0{,}0027\, t^5\left(2\,\psi - 0{,}5\right)\left(z - 5{,}7\right)^3\,\frac{\gamma}{g} + 0{,}023\,\psi\, t^5\,\frac{\gamma}{g}\left(z^3 - 8{,}5\, z^2 + 32\, z - 45\right)$$

oder

$$(19) \qquad \Theta = 0{,}023\, t^5\,\frac{\gamma}{g}\Big[(1{,}23\,\psi - 0{,}06)\, z^3 - (12{,}4\,\psi - 1)\, z^2 + (55\,\psi - 6)\, z - (89\,\psi - 11)\Big].$$

Die Verwendung dieses Ausdrucks verlangt umfangreiche Zahlenrechnungen. Es erscheint deshalb angebracht, eine einfachere Näherungsformel als Ersatz für Gl. (19) zu beschaffen, die für praktisch mögliche Werte von z und ψ annähernd übereinstimmende Ergebnisse liefert. Als solche Formel kann gelten:

(20) $$\Theta = 0{,}024\, t^5\, z^3\, \psi\, \frac{\gamma}{g}$$ [1],

die die Abhängigkeit des Trägheitsmoments der im Hebezeugbau üblichen Zahnrädertypen von Teilung, Zähnezahl und Zahnbreite in einfacher Weise zum Ausdruck bringt.

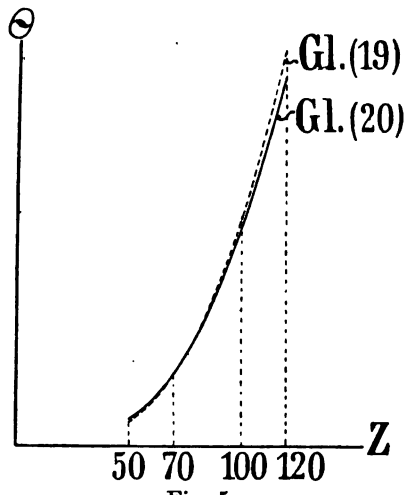

Fig. 5.

Setzt man in (20) $\gamma = 0{,}00725$ und $g = 981$ cm, so ergibt sich für gusseiserne Räder in kgcm:

(21) $$\Theta_g = \frac{177}{10^9}\, t^5\, z^3\, \psi$$

und mit $\gamma = 0{,}00786$ für Räder aus Stahl in kgcm:

(22) $$\Theta_s = \frac{192}{10^9}\, t^5\, z^3\, \psi.$$

§ 4. Rollenzüge.

Der Einfluss der Massen der Rollenzüge auf die Grösse der notwendigen Beschleunigungskraft ist, wie das im Abschnitt V folgende Zahlenbeispiel zeigt, im Vergleich zu dem der Motormassen und der Last sehr gering (vergl. die Tabelle der Trägheitsmomente S. 63 Spalte 7). Mit Rücksicht auf den bei Berechnung der reduzierten Masse eines Triebwerks überhaupt erreichbaren Genauigkeitsgrad ist also die Vernachlässigung der Massen von etwa vorhandenen Rollenzügen wohl zulässig und wegen der sonst unvermeidlichen und zeitraubenden Rechnungen empfehlenswert. Der Vollständigkeit halber und um später den ziffernmässigen Nachweis der Richtigkeit der obigen Ausführungen erbringen zu können, seien jedoch die vom Verfasser aufgestellten Gleichungen ohne die zugehörigen Entwicklungen angeführt. Bemerkt sei nur, dass sich diese Gleichungen aus Gl. (3) und (5) S. 4 bezw. 5 auf einfache

---

[1]) Für die mittlere Breite $\psi t = 3t$ und

$z =$	50	70	100	120	
ergibt Gl. (19)	8532	24807	75523	132714	$\frac{\gamma}{g}\, t^5$
und Gl. (20)	9000	24696	72000	124416	—,
somit Unterschied . . .	+ 468	— 109	— 3523	— 8298	—,
dieser Unterschied in %	+ 5,2	— 0,5	— 4,9	— 6,7 %	

Eine Übersicht über die Abweichungen ergibt sich aus Fig. 5.

Weise ergaben, nachdem in jedem einzelnen Fall die Grössen des Wirkungsgrades η_k und der Übersetzung i_k festgestellt worden waren.

1. Potenzrollenzug.

Bezeichnet

n die Anzahl der Vorgelege,

m_r die auf den Rollenumfang und zwar die Seilmitte reduzierte Masse einer Rolle in kg/cm,

$\mathfrak{Q}$ das Gewicht einer Rolle in kg,

l die Länge des bewegten Seiltrums in cm, die der Einfachheit halber bei jedem Vorgelege gleich gross angenommen ist,

q das Seilgewicht in kg pro laufenden cm,

$\varkappa$ das Verhältnis der Seilspannungen im ab- und auflaufenden Trum,

so ist nach der Rechnung des Verfassers die reduzierte Masse des als Lastrollenzug verwendeten Potenzrollenzugs:

$$m = \frac{m'}{(4\eta)^n - 1} \cdot \frac{(4\eta)^n - 1}{4\eta - 1}, \tag{23}$$

worin

$$m' = q\frac{l}{g} + \frac{m_r}{4\eta} + \frac{\mathfrak{Q}}{g}\frac{1}{4\eta} \tag{24}$$

$$\eta = \frac{\varkappa + 1}{2\varkappa} \tag{25}$$

und für die reduzierte Masse des als Triebrollenzug verwendeten Potenzrollenzugs

$$m_1 = \frac{m'_1}{\eta^{n-1}} \cdot \frac{4^n - \eta'^n}{4 - \eta'}, \tag{26}$$

worin

$$m'_1 = \frac{\mathfrak{Q}}{g} + \frac{m_r}{\eta'} + \frac{ql}{g}\frac{4}{\eta'} \tag{27}$$

$$\eta' = \frac{2}{1 + \varkappa}. \tag{28}$$

2. Faktorenrollenzug.

Die reduzierte Masse des Rollenzugs, der n Rollen besitze, wird berechnet als Summe aus den reduzierten Massen der Rollen und Seile. Für den als Lastrollenzug verwendeten Flaschenzug beträgt die reduzierte Masse der Rollen:

$$m_\varrho = \frac{m_r}{n^2}\left[\varkappa^{n-1} + 2^2\varkappa^{n-2} + \ldots + (n-1)^2\varkappa + n^2\right] \tag{29}$$

$$= \frac{m_r}{n^2} \cdot \frac{\varkappa^{n+1}(\varkappa + 1) - [\varkappa(n+1) - n]^2 - \varkappa}{(\varkappa - 1)^3} \tag{29a}$$

und als reduzierte Masse der Seile, ausgenommen die von der letzten losen Rolle ablaufende Seilstrecke,

für einen Rollenzug mit ungerader Rollenzahl (s. Fig. 6)

$$(30)\quad m_\sigma = \frac{lq}{g}\frac{1+\varkappa}{n^2}\left[\varkappa^{n-2} + 3^2\varkappa^{n-4} + \ldots + (n-2)^2\varkappa\right]$$

und für einen Rollenzug mit gerader Rollenzahl (s. Fig. 7)

$$(31)\quad m_\sigma = \frac{lq}{g}\frac{1+\varkappa}{n^2}\left[2^2\varkappa^{n-3} + 4^2\varkappa^{n-5} + \ldots + (n-2)^2\varkappa\right].$$

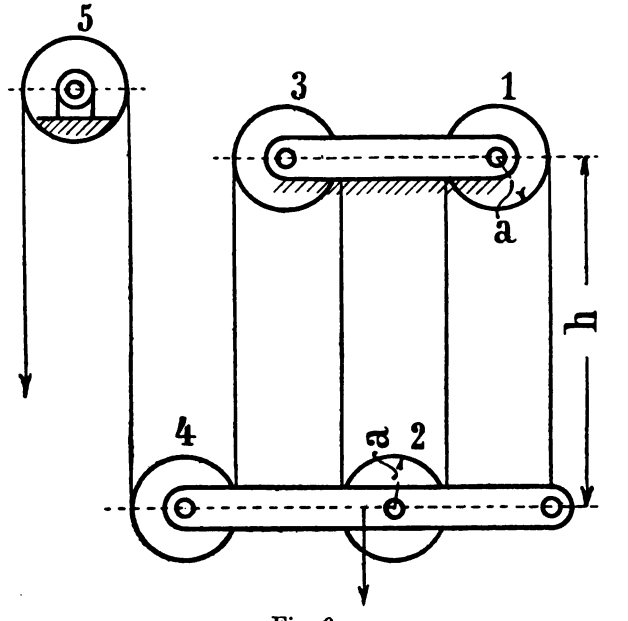

Fig. 6.

Wird der Rollenzug als Triebrollenzug verwendet, so berechnet sich die reduzierte Masse der vorhandenen n Rollen aus:

$$(32)\quad m_\varrho = \frac{m_r}{\varkappa-1}\varkappa\left[\varkappa(1 + 2\varkappa + 3\varkappa^2 + \ldots + n\varkappa^{n-1}) + (1 + 2 + 3 + \ldots + n)\right]$$

$$(32a)\quad = \frac{m_r}{\varkappa-1}\varkappa\left[\varkappa\frac{n\varkappa^{n+1} - (n+1)\varkappa^n + 1}{(\varkappa-1)^2} - \frac{n(n+1)}{2}\right],$$

ferner die reduzierte Masse der Seile ausgenommen, die auf die letzte lose Rolle auflaufende Seilstrecke,
für den Rollenzug mit ungerader Rollenzahl (s. Fig. 6)

$$(33)\quad m_\sigma = \frac{lq}{g}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\left[\varkappa(1 + 3\varkappa^2 + 5\varkappa^4 + \ldots + (n-2)\varkappa^{n-3}) - (1 + 3 + 5 + \ldots + n - 2)\right]$$

$$(33a)\quad = \frac{lq}{g}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\left[\varkappa\frac{(n-2)\varkappa^{n+1} - n\varkappa^{n-1} + \varkappa^2 + 1}{(\varkappa^2-1)^2} - \left(\frac{-1}{2}\right)^2\right]$$

und für den Rollenzug mit gerader Rollenzahl (s. Fig. 7)

$$(34)\quad m_\sigma = 2\frac{lq}{g}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\left[\varkappa^2\left(1+2\varkappa^2+3\varkappa^4+\ldots+\frac{n-2}{2}\varkappa^{n-4}\right)\right.$$
$$\left.-\left(1+2+3+\ldots+\frac{n-2}{2}\right)\right]$$

$$(34a)\quad = \frac{lq}{g}\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\left[\varkappa^2\frac{(n-2)\varkappa^n-n\varkappa^{n-2}+2}{(\varkappa^2-1)^2}-\frac{n(n-2)}{4}\right].$$

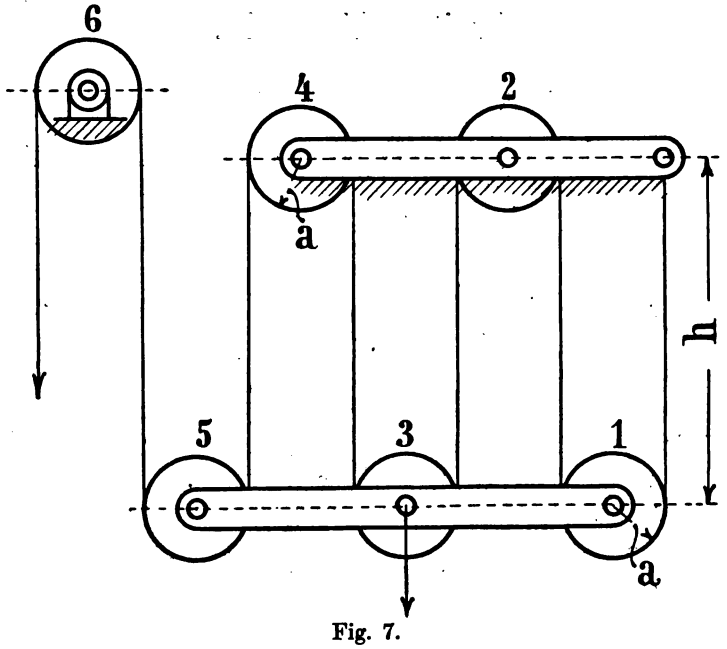

Fig. 7.

In den Gleichungen (29) bis (34a) ist mit Bezug auf die in den Figuren 6 und 7 angegebenen Bezeichnungen zu setzen:

$$(35)\qquad l = h + a\pi.$$

Für praktische Rechnungen sind die Gleichungen (29), (32), (33) und (34) bequemer als die Gleichungen (29a), (32a), (33a) und (34a), in denen die in den ersteren vorkommenden Reihen durch geschlossene Ausdrücke ersetzt sind, denn da $\varkappa$ von 1 wenig verschieden, so nehmen die geschlossenen Ausdrücke nahezu den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ an.

Zweiter Abschnitt.

Einfluss der Elastizität der Triebwerkteile auf die Beanspruchung des Triebwerks beim Anlauf.

Die Elastizität der einzelnen Triebwerkteile bedingt, dass die Grösse der weitergeleiteten Triebkraft abhängig ist von dem Grad der stattgehabten Formänderung. Wenn die Triebkraft als konstant gelten darf — was im folgenden stets vorausgesetzt wird —, so gelangt im ersten Augenblick des Anlaufs durch die vorher nicht belasteten Triebwerkteile ein mit zunehmender Formänderung derselben zunehmender Teil der Triebkraft weiter. Der nicht weitergeleitete Teil wird zu örtlicher Massenbeschleunigung verwendet. Die beim Motor befindlichen Triebwerkmassen erhalten so sehr rasch eine gewisse Geschwindigkeit, während die übrigen Triebwerkteile kaum oder noch gar nicht in Bewegung sind. Diese Geschwindigkeitsunterschiede haben, wie in diesem Abschnitt dargelegt wird, die Entstehung von Schwingungen zur Folge, die eine bedeutend grössere Anstrengung des Triebwerks bedingen, als rechnungsmässig ohne Berücksichtigung derselben aus der Grösse der vorhandenen Triebkraft und den Wirkungsverlusten folgt. Die Schwingungen erstrecken sich auf alle Triebwerkteile von der Eintrittsstelle der Kraft bis zu ihrem Verwendungsort.

Um diese Vorgänge analytisch untersuchen zu können, braucht man in erster Linie eine Beziehung, die ausdrückt, in welcher Weise bei den verschiedenen Arten der Beanspruchung die Formänderung von der Belastung abhängt. Als wichtigste Fälle der Beanspruchung kommen in Betracht: diejenigen auf Drehung, auf Zug und Druck. Die Anstrengung auf Biegung ist weniger wichtig und wird deshalb hier nicht weiter untersucht.

§ 1. Gesetz der Abhängigkeit der Formänderung von der Beanspruchung — Nachgiebigkeitsgrad eines Triebwerkteils.

1. Fall der Beanspruchung einer Welle auf Drehung.

Bezeichnet

K die am Hebelarm r wirkende, der vorhandenen Formänderung entsprechende Kraft,

s den vom Angriffspunkt der Kraft K infolge der eingetretenen Formänderung zurückgelegten Weg,

d den Durchmesser der überall gleich starken Welle,

l die Länge des auf Drehung beanspruchten Stücks der Welle,

δ den verhältnismässigen Drehungswinkel, d. h. den Winkel, um welchen sich ein Wellenquerschnitt gegenüber dem um 1 cm davon abstehenden unter der Einwirkung der Kraft K verdreht,

β den Schubkoeffizienten des Wellenmaterials,

so ist
$$Kr = \frac{\delta \cdot \pi d^4}{32\beta} \text{ [1]}$$

oder da
$$s = \delta l r, \quad \text{also } \delta = \frac{s}{lr},$$

so wird
$$K = \frac{s \pi d^4}{32 \beta l r^2},$$

woraus
$$s = K \frac{32 \beta l r^2}{\pi d^4}.$$

Setzt man nun hierin

(36)
$$\gamma = \frac{32 \beta l r^2}{\pi d^4},$$

so wird

(37)
$$s = \gamma K.$$

---

[1]) Ist τ die Schubspannung längs eines Kreises vom Halbmesser ϱ, τ_s die Schubspannung längs des Umfangs des Querschnitts, so ist

$$Kr = \int_{\varrho=o}^{\varrho=\frac{d}{2}} \tau \, df \, \varrho = \int_{o}^{\frac{d}{2}} \tau \, 2\varrho \pi \, d\varrho \cdot \varrho \quad \text{oder weil } \tau = \frac{\varrho}{\frac{d}{2}} \tau_s$$

$$Kr = \frac{4 \tau_s \pi}{d} \int_{o}^{\frac{d}{2}} \varrho^3 \, d\varrho = \frac{\pi \cdot \tau_s d^3}{16}.$$

Da nun für die Umfangsfaser

$$\beta \tau_s = \frac{d}{2} \delta \quad \text{oder} \quad \tau_s = \frac{d}{2\beta} \delta,$$

so wird
$$Kr = \frac{\delta \pi d^4}{32 \beta}.$$

Der Koeffizient γ ist für bestimmte Verhältnisse konstant, wenn β konstant ist. Dies kann für die in Betracht kommenden Fälle stets vorausgesetzt werden.

Ist die Welle nicht überall gleich stark und sind die Unterschiede so bedeutend, dass die Annahme eines mittleren Durchmessers unzulässig wäre, so ergibt sich der resultierende Koeffizient γ als die Summe der Koeffizienten der einzelnen zylindrischen Wellenstücke.

2. Fall der Beanspruchung auf Zug und Druck.

Bezeichnet

K die Zug- oder Druckkraft,
l die Länge des beanspruchten Stabes,
F den überall als konstant vorausgesetzten Querschnitt desselben,
ε die vorhandene positive oder negative Dehnung,
α den Dehnungskoeffizienten des Materials,

so ist, wenn auch die früheren Bezeichnungen verwendet werden:

$$\varepsilon = \frac{s}{l} = \alpha \frac{K}{F},$$

woraus

$$s = \frac{l \alpha K}{F}.$$

Setzt man nun hierin

$$\gamma = \frac{l \alpha}{F}, \tag{38}$$

so wird

$$s = \gamma K. \tag{39}$$

Der Koeffizient γ kann auch hier als konstant gelten, weil im allgemeinen α als konstant vorausgesetzt werden darf.

Bei stark veränderlichem Querschnitt berechnet sich der resultierende Koeffizient γ als die Summe der Koeffizienten der einzelnen Stabteile von gleichem Querschnitt.

Die Gleichungen (37) und (39) zeigen, dass Proportionalität zwischen der Formänderung und der vermöge dieser Formänderung weitergeleiteten Kraft besteht. Der Koeffizient γ kann aufgefasst werden als die durch die Kraft 1 kg erzeugte Formänderung. Er gibt das Mass der Nachgiebigkeit des Triebwerkteils an und wird deshalb als Nachgiebigkeitsgrad bezeichnet.

§ 2. Der reduzierte Nachgiebigkeitsgrad eines Triebwerks.

Unter dem reduzierten Nachgiebigkeitsgrad eines Triebwerks verstehen wir denjenigen Wert des Koeffizienten γ, der sich aus den Abmessungen eines am Angriffspunkt der Kraft gedachten elastischen Gliedes ergeben müsste [s. Gl. (36) oder (38)], wenn

seine Nachgiebigkeit die des ganzen Triebwerks ersetzen könnte. Da die Untersuchung dynamischer Vorgänge in einem Triebwerk am einfachsten stets in der Weise geschieht, dass man den Vorgang auf den Angriffspunkt der Kraft bezieht, so ist die Kenntnis des Wertes des reduzierten Nachgiebigkeitsgrades — wie desjenigen der reduzierten Masse — von Wichtigkeit. Es werden deshalb im folgenden die zur Berechnung desselben erforderlichen Gleichungen entwickelt. Dabei ist ein Räderwerk mit n Vorgelegewellen, von denen zunächst nur eine beliebige $k$te als nachgiebig betrachtet wird, zugrunde gelegt.

Bezeichnet

s'_k die dem Weg s_k des Angriffspunktes der Kraft entsprechende Formänderung der $k$ten Welle,

γ'_k den zu s'_k gehörigen Nachgiebigkeitsgrad der $k$ten Welle,

γ_k den reduzierten Wert von γ'_k,

$P_k = \frac{s_k}{\gamma_k}$ die zur Beschleunigung des $k$ten Triebwerkelementes erforderliche Triebkraft,

$P'_k = \frac{s'_k}{\gamma'_k}$ diejenige Kraft, die an dem den Weg s'_k zurücklegenden Punkt des $k$ten Vorgeleges wirken müsste, um die Triebkraft P_k zu ersetzen,

$i_k = \frac{s'_k}{s_k}$ die Übersetzung des Triebwerks bis zu diesem Punkt,

η_k den Wirkungsgrad des Triebwerks bis zur $k$ten Welle,

so ergibt die Arbeitsgleichung

$$P'_k s'_k = P_k s_k \eta_k .$$

Da nun entsprechend Gl. (37) S. 17

$$P_k = \frac{s_k}{\gamma_k} \text{ und } P'_k = \frac{s'_k}{\gamma'_k},$$

so folgt

$$\frac{s'^2_k}{\gamma'_k} = \frac{s^2_k}{\gamma_k} \eta_k ,$$

woraus

$$\gamma_k = \gamma'_k \frac{s^2_k}{s'^2_k} \eta_k ,$$

oder

$$\gamma_k = \gamma'_k \frac{\eta_k}{i^2_k}. \tag{40}$$

Damit hat man den Ausdruck für den reduzierten Nachgiebigkeitsgrad eines Vorgeleges. Man erkennt, dass dieser mit abnehmender Übersetzung sehr stark zunimmt.

Den Nachgiebigkeitsgrad des ganzen Triebwerks erhalten wir als die Summe der reduzierten Nachgiebigkeitsgrade der einzelnen Vorgelege, die sich mit $k = 1, 2, 3 \ldots n$ aus Gl. (40) ergeben,

$$\gamma = \gamma'_1 \frac{\eta_1}{i^2_1} + \gamma'_2 \frac{\eta_2}{i^2_2} + \ldots + \gamma'_n \frac{\eta_n}{i^2_n}. \tag{41}$$

Die Form dieses Ausdrucks für den reduzierten Nachgiebigkeitsgrad entspricht vollständig derjenigen für die reduzierte Masse [s. Gl. (5) S. 5].

§ 3. Der dynamische Begriff eines Triebwerks.

Die Einführung der Begriffe der reduzierten Masse und des reduzierten Nachgiebigkeitsgrades gestattet, die Untersuchung der dynamischen Vorgänge in einem Triebwerk in der Weise vorzunehmen, dass man das Triebwerk als ein System von Massen auffasst, die in gerader Richtung hintereinander angeordnet (s. Fig. 8) und von denen je zwei aufeinanderfolgende durch ein elastisches Zwischenglied verbunden sind. Die Grösse dieser Massen ist gleich den reduzierten Werten der Massen der einzelnen Getriebeelemente [s. Gl. (3) und (11) S. 4 und 8] und die Nachgiebigkeit der Zwischenglieder ist gleich den reduzierten Werten der Nachgiebigkeit der im Triebwerk vorhandenen elastischen Glieder (Wellen u. s. f.) [s. Gl. (40)]. Dabei ist noch zu beachten, dass auch die im Massensystem auftretenden Kräfte die auf den Angriffspunkt der Kraft bezogenen, d. h. reduzierten Werte der im Triebwerk vorhandenen Kräfte darstellen, also proportional der Übersetzung und umgekehrt proportional dem Wirkungsgrad sind. Die dynamischen Vorgänge im Triebwerk entsprechen denen in diesem Massensystem vollständig, falls im letzteren die äusseren Kräfte P und R die reduzierten Werte der Triebkraft und des Arbeitswiderstandes darstellen.

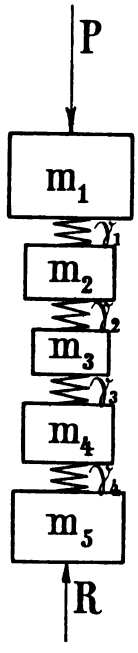

Fig. 8.

Die Triebkraft tritt an der ersten der Massen, der Masse m_1 des Motors, ein, vermehrt oder vermindert sich beim Durchgang durch das Massensystem, je nachdem sich die einzelnen Massen gerade in einem Zustand der Verzögerung oder Beschleunigung befinden und wird an derjenigen Masse, wo der Arbeitswiderstand wirkt, verwendet. Je nach der Grösse der durchgeleiteten Kraft K ändert sich der gegenseitige Abstand zweier Massen und zwar beträgt die Änderung gegenüber dem Zustand der Spannungslosigkeit nach Gl. (37) und (39) $s = \gamma K$.

Wir betrachten im folgenden die Massen als unelastisch und die Zwischenglieder als masselos, eine Annahme, die zulässig sein dürfte, da jedes Triebwerk im allgemeinen vorwiegend starre und

vorwiegend elastische Getriebeteile besitzt. Die Werte der reduzierten Massen und des reduzierten Nachgiebigkeitsgrades fassen wir als konstant auf, was allerdings nach den Darlegungen im Abschnitt I § 2 nur mit Einschränkung angenommen werden kann.

§ 4. Dynamische Vorgänge beim Anlauf eines Triebwerks mit nur einem elastischen Zwischenglied.

Es bezeichne

γ den reduzierten Nachgiebigkeitsgrad des elastischen Gliedes,

m_1 den Wert der auf den Angriffspunkt der Kraft reduzierten, vor dem elastischen Glied liegenden starren Triebwerkmassen,

m_2 den Wert der auf den Angriffspunkt der Kraft reduzierten, hinter dem elastischen Glied liegenden starren Massen,

P die treibende Kraft,

R den zur Überwindung von Arbeitswiderständen dienenden Teil von P, der als Reibungswiderstand gedacht ist und der Anstrengung des Triebwerks im Beharrungszustand entspricht,

K den reduzierten Wert der vom elastischen Zwischenglied zur Zeit t weitergeleiteten Kraft,

s_1 und s_2 die zur Zeit t von den Massen m_1 und m_2 zurückgelegten Wege.

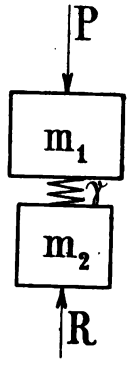

Fig. 9.

Durch diese Bezeichnungen ist der zu untersuchende Fall auf den in Fig. 9 angegebenen zurückgeführt. Es ist leicht ersichtlich, dass die Massen m_2 erst in Bewegung kommen, wenn die Formänderung des elastischen Gliedes denjenigen Betrag erreicht hat, der dem Widerstand R entspricht, weil die bis zu diesem Zeitpunkt zu den Massen m_2 gelangende Kraft K zur Überwindung von R nicht ausreicht. In dieser ersten Periode des Anlaufs dient die treibende Kraft nur zur Überwindung des Trägheitswiderstandes der Massen m_1 und des Gegendruckes, welcher der sich allmählich einstellenden Formänderung des elastischen Triebwerkteils entspricht; d. h. es ist:

$$P = m_1 p_1 + K,$$

oder weil

$$p_1 = \frac{d^2 s_1}{d t^2} \text{ und } K = \frac{s_1}{\gamma}$$

[s. Gl. (37) S. 17]

$$P - \frac{s_1}{\gamma} - m_1 \frac{d^2 s_1}{d t^2} = 0. \tag{42}$$

Die Integration dieser Differentialgleichung gibt gemäss unten-

stehender mathematischer Umformung[1]) folgende Beziehung zwischen s_1 und t:

$$(43) \qquad s_1 = \gamma P \left(1 - \cos \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}}\, t\right).$$

Hieraus ergibt sich die folgende jeweilige Geschwindigkeit der Massen m_1

$$(44) \qquad v_1 = \frac{d s_1}{d t} = \sqrt{\frac{\gamma}{m_1}}\, P \sin \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}}\, t.$$

Gl. (43) gibt gemäss Gl. (37) unmittelbar die Beziehung zwischen der Beanspruchung K des elastischen Triebwerkteils und der Zeit t

$$(45) \qquad K = \frac{s_1}{\gamma} = P \left(1 - \cos \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}}\, t\right).$$

---

[1]) Die Ableitung der Gl. (42) nach t lautet

$$(a) \qquad -\frac{1}{\gamma} \frac{d s_1}{d t} - m_1 \frac{d^2 s_1}{d t^2} = 0.$$

Damit hat man eine lineare, homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, deren Lösung sich bekanntlich folgendermassen ergibt:

Es wird gesetzt $s_1 = e^{r t}$, so dass

$$\frac{d s_1}{d t} = r e^{r t}, \quad \frac{d^2 s_1}{d t^2} = r^2 e^{r t},$$

und damit geht Gl. (a) über in die folgende

$$-e^{r t} \left(\frac{1}{\gamma} r + m_1 r^2\right) = 0,$$

woraus

$$r = \begin{cases} 0 \\ \pm i \sqrt{\dfrac{1}{m_1 \gamma}} \end{cases}.$$

Es ergibt sich nun als allgemeines Integral:

$$(b) \qquad s_1 = A e^0 + B \cos \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}}\, t + C \sin \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}}\, t.$$

Hierbei sind A, B, C Integrationskonstante.

Aus (b) folgt

$$(c) \qquad \frac{d s_1}{d t} = -B \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}} \sin \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}}\, t + C \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}} \cos \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}}\, t$$

$$(d) \qquad \frac{d^2 s_1}{d t^2} = -B \frac{1}{m_1 \gamma} \cos \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}}\, t - C \frac{1}{m_1 \gamma} \sin \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}}\, t.$$

Setzt man nun den Wert für s_1 aus (b) und für $\frac{d^2 s_1}{d t^2}$ aus (d) in Gl. (42) ein, so erhält man $A = \gamma P$.

Da ferner mit $t = 0$, $s_1 = 0$, so wird nach (b)

$$A + B = 0 \text{ und somit } B = -A = -\gamma P,$$

und da mit $t = 0$, $\frac{d s_1}{d t} = 0$, so wird nach (c)

$$C = 0.$$

Mit den für A, B, C gefundenen Werten ergibt sich nun unmittelbar aus (b) die Gl. (43).

Nach Gl. (43) und (45) ändert sich der von den Massen m_1 zurückgelegte Weg und die von dem elastischen Glied weitergeleitete Kraft nach einem *cos*-Gesetze, d. h. periodisch zwischen zwei bestimmten Grenzwerten.

Die Minimalwerte von s_1 und K, die man mit $cos \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}}\, t = cos\ 0 = 1$ erhält, sind, wie zu erwarten ist, gleich Null. Die Maximalwerte ergeben sich mit

$$cos \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}}\, t = cos\, \pi = -1$$

zu $$s_{1\max} = 2\gamma P, \quad K_{\max} = 2P,$$

betragen also je das doppelte der der Kraft P bei ruhender Belastung entsprechenden Werte. Wäre also der Arbeitswiderstand des Triebwerks grösser als $2P$, so würde im Triebwerk keine nützliche Bewegung entstehen, sondern es würden nur die Massen m_1 zwischen ihrer Anfangslage und dem Werte $s_1 = 2\gamma P$ sinusförmige Schwingungen ausführen.

Übersteigt aber K den Wert R, so kommen auch die Massen m_2, mit unendlich kleiner Beschleunigung beginnend, in Bewegung. Der bis dahin von m_1 zurückgelegte Weg ergibt sich aus Gl. (37) mit $K = R$

$$s_\tau = \gamma R. \tag{46}$$

Setzt man diesen Wert in Gl. (43) an die Stelle von s_1, so erhält man die bis jetzt verstrichene Zeit τ:

$$\tau = \sqrt{m_1 \gamma}\ arc\, cos \frac{P-R}{P} \tag{47}$$

und mit $t = \tau$ aus Gl. (44) die alsdann vorhandene Geschwindigkeit v_τ der Massen m_1

$$v_\tau = \sqrt{\frac{\gamma}{m_1}}\, P\, sin \left[\sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}} \sqrt{m_1 \gamma}\ arc\, cos \frac{P-R}{P}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\gamma}{m_1}}\, P\, sin \left[arc\, sin \sqrt{1 - \left(\frac{P-R}{P}\right)^2}\right]$$

$$v_\tau = \sqrt{\frac{R\,(2P-R)}{m_1}}\, \gamma. \tag{48}$$

Nachdem nun beide Endpunkte des elastischen Glieds in Bewegung sind, so ist klar, dass dessen Formänderung von jetzt ab durch die Differenz der Wege s_1 und s_2 der Massen m_1 und m_2 gemessen wird, d. h. an Stelle der Gleichungen (37) oder (39) hat man jetzt die folgende

$$\left.\begin{array}{l} \\ \text{woraus} \end{array}\right\} \begin{array}{l} s_1 - s_2 = \gamma K, \\ K = \frac{s_1 - s_2}{\gamma}. \end{array} \tag{37a}$$

Die an beiden Endpunkten des elastischen Gliedes vorhandene Kraft K ist nun einerseits gleich dem Überschuss der Triebkraft P über den Beschleunigungswiderstand der Massen m_1 und andererseits gleich der Summe aus dem Beschleunigungswiderstand der Massen m_2 und dem Arbeitswiderstand R, d. h. es ist

$$(49) \quad \ldots \quad \begin{cases} P - m_1 \frac{d^2 s_1}{d t^2} = \frac{s_1 - s_2}{\gamma} \\ R + m_2 \frac{d^2 s_2}{d t^2} = \frac{s_1 - s_2}{\gamma}. \end{cases}$$

Damit hat man entsprechend den drei Veränderlichen s_1, s_2 und t ein simultanes System von zwei Differentialgleichungen, deren Integration gemäss untenstehender mathematischer Umformung[1]) liefert:

---

[1]) Die zweiten Ableitungen der Gleichungen (49) nach t ergeben:

$$(a) \quad \ldots \quad \begin{cases} -m_1 \frac{d^4 s_1}{d t^4} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{d^2 s_1}{d t^2} - \frac{d^2 s_2}{d t^2} \right) \\ m_2 \frac{d^4 s_2}{d t^4} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{d^2 s_1}{d t^2} - \frac{d^2 s_2}{d t^2} \right). \end{cases}$$

Eliminiert man aus der ersten dieser Gleichungen und aus (49) s_2 und $\frac{d^2 s_2}{d t^2}$, so erhält man folgende nur die Veränderlichen s_1, $\frac{d^2 s_1}{d t^2}$, $\frac{d^4 s_1}{d t^4}$ enthaltende Gleichung

$$(b) \qquad \gamma m_1 m_2 \frac{d^4 s_1}{d t^4} + (m_1 + m_2) \frac{d^2 s_1}{d t^2} + R - P = 0,$$

woraus durch weitere Ableitung nach t folgt:

$$(c) \qquad \gamma m_1 m_2 \frac{d^5 s_1}{d t^5} + (m_1 + m_2) \frac{d^3 s_1}{d t^3} = 0.$$

Ist $s_1 = e^{rt}$ das dieser linearen homogenen Differentialgleichung entsprechende Integral, so wird

$$\frac{d^3 s_1}{d t^3} = r^3 e^{rt}, \quad \frac{d^5 s_1}{d t^5} = r^5 e^{rt},$$

so dass Gl. (c) lautet:

$$e^{rt} [\gamma m_1 m_2 r^5 + (m_1 + m_2) r^3] = 0.$$

Hieraus ergibt sich:

$$r = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \pm i \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 \gamma}}. \end{cases}$$

Somit hat Gl. (c) das allgemeine Integral

$$(d) \quad s_1 = A_1 \sin \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 \gamma}} t + B_1 \cos \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 \gamma}} t + C_1 + D_1 t + E_1 t^2.$$

$$(50)\ s_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\gamma\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}R(2P-R)}\,sin\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,(t-\tau)$$
$$-\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2\gamma(P-R)\,cos\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,(t-\tau)+\gamma R$$
$$+\gamma\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2(P-R)+\frac{1}{m_1+m_2}\sqrt{\gamma m_1 R(2P-R)}\,(t-\tau)$$
$$+\frac{P-R}{2(m_1+m_2)}(t-\tau)^2,$$

Die Elimination von s_1, $\frac{d^2 s_1}{dt^2}$ aus den Gleichungen (49) und (a) ergibt folgende Gleichung:

$$\gamma m_1 m_2 \frac{d^4 s_2}{dt^4} + (m_1+m_2)\frac{d^2 s_2}{dt^2} + R - P = 0,$$

d. h. eine Differentialgleichung von derselben Form und denselben Koeffizienten wie Gl. (b); es kann somit das Integral nur in den Konstanten verschieden sein und man hat mit Bezug auf (d)

$$(e)\quad s_2 = A_2\,sin\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,t + B_2\,cos\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,t + C_2 + D_2 t + E_2 t^2.$$

Die vier ersten Ableitungen von s_1 nach t lauten:

$$\frac{ds_1}{dt} = A_1\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,cos\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,t$$
$$-B_1\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,sin\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,t + D_1 + 2E_1 t$$

$$\frac{d^2 s_1}{dt^2} = -A_1\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}\,sin\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,t$$
$$-B_1\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}\,cos\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,t + 2E_1$$

$$\frac{d^3 s_1}{dt^3} = -A_1\left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}\right)^{\frac{3}{2}}cos\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,t$$
$$+B_1\left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}\right)^{\frac{3}{2}}sin\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,t$$

$$\frac{d^4 s_1}{dt^4} = A_1\left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}\right)^2 sin\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,t$$
$$+B_1\left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}\right)^2 cos\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,t.$$

Die entsprechenden Ableitungen von s_2 nach t erhält man, wenn man A_2, B_2, D_2 und E_2 an Stelle von A_1, B_1, D_1 und E_1 einsetzt.

Mit den Ausdrücken für $\frac{d^2 s_1}{dt^2}$ und $\frac{d^4 s_1}{dt^4}$ gibt Gl. (b)

$$2E_1(m_1+m_2) + R - P = 0,$$

woraus

$$(f)\qquad E_1 = \frac{P-R}{2(m_1+m_2)}.$$

$$(51)\quad s_2 = -\frac{m_1}{m_1+m_2}\gamma\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}R(2P-R)}\,sin\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2 \gamma}}(t-\tau)$$
$$+\frac{m_1 m_2 \gamma}{(m_1+m_2)^2}(P-R)\,cos\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2 \gamma}}(t-\tau)-\frac{\gamma m_1 m_2}{(m_1+m_2)^2}(P-R)$$
$$+\frac{1}{m_1+m_2}\sqrt{\gamma m_1 R(2P-R)}\,(t-\tau)+\frac{P-R}{2(m_1+m_2)}(t-\tau)^2,$$

wo τ aus Gl. (47) S. 23 sich ergibt.

Ebenso erhält man durch Einsetzen der Werte für s_1, s_2 und $\frac{d^2 s_1}{d t^2}$ in die erste Gleichung von (49):

$$P-2m_1 E_1 + A_1\frac{m_1+m_2}{m_2\gamma}\,sin\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,t + B_1\frac{m_1+m_2}{m_2\gamma}\,cos\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,t$$
$$=\frac{C_1-C_2}{\gamma}+\frac{A_1-A_2}{\gamma}\,sin\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,t+\frac{B_1-B_2}{\gamma}\,cos\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,t$$
$$+\frac{D_1-D_2}{\gamma}t+\frac{E_1-E_2}{\gamma}t^2.$$

Hieraus ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung:

$$\frac{1}{\gamma}(C_1-C_2)=P-2m_1E_1=\frac{Rm_1+Pm_2}{m_1+m_2},\quad \text{somit } C_2=C_1-\gamma\frac{Rm_1+Pm_2}{m_1+m_2}$$
$$\frac{1}{\gamma}A_1\frac{m_1+m_2}{m_2}=\frac{1}{\gamma}(A_1-A_2),\qquad \text{„}\quad A_2=-\frac{m_1}{m_2}A_1$$
$$\frac{1}{\gamma}B_1\frac{m_1+m_2}{m_2}=\frac{1}{\gamma}(B_1-B_2),\qquad \text{„}\quad B_2=-\frac{m_1}{m_2}B_1$$
$$D_1-D_2=0,\qquad \text{„}\quad D_2=D_1$$
$$E_1-E_2=0,\qquad \text{„}\quad E_2=E_1.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gl. (c) erhält man:

$$(g)\qquad s_2=-A_1\frac{m_1}{m_2}\,sin\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,t-B_1\frac{m_1}{m_2}\,cos\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}}\,t$$
$$+C_1-\gamma\frac{Rm_1+Pm_2}{m_1+m_2}+D_1 t+\frac{P-R}{2(m_1+m_2)}t^2.$$

Um nun für die Konstanten A_1, B_1, C_1 und D_1 einfache Werte zu erhalten, bestimmen wir dieselben derart, dass die sich ergebende Gleichung sich auf ein um $t=+\tau$ verschobenes Koordinatensystem bezieht. Man bringt dann diese wieder auf die richtige Form, indem man $t-\tau$ für t einsetzt. Zur Bestimmung der Konstanten benützen wir, dass für

$$t=0,\ s_1=s_\tau=\gamma R \text{ und } \frac{d s_1}{d t}=v_\tau=\sqrt{\frac{R(2P-R)\gamma}{m_1}}$$

[s. Gl. (46) und (48)]

$$s_2=0 \text{ und } \frac{d s_2}{d t}=0$$

wird.

Damit ergeben die Gleichungen (d) und (g)

$$B_1+C_1=\gamma R \text{ und } -B_1\frac{m_1}{m_2}+C_1-\frac{Rm_1+Pm_2}{m_1+m_2}\gamma=0,$$

Die Kenntnis der Werte für s_1 und s_2 gestattet nun unmittelbar nach Gl. (37a) S. 23 die Herstellung des Ausdrucks für die Beanspruchung des elastischen Teils. Man erhält

$$(52)\quad K = \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2} R(2P-R)}\, sin \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2 \gamma}}(t-\tau) - \frac{m_2}{m_1+m_2}(P-R)\cos\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2 \gamma}}(t-\tau) + \frac{R m_1 + P m_2}{m_1+m_2}.$$

Das Auftreten der periodischen Funktionen *cos* und *sin* in den Gleichungen (50), (51) und (52) beweist, dass auch in dieser zweiten Periode des Anlaufs die Bewegung der Massen m_1 und m_2 in Schwingungen vor sich geht.

Setzt man nun in Gl. (52)

$$(53)\quad b \equiv \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2} R(2P-R)},\quad c \equiv \frac{m_2}{m_1+m_2}(P-R),$$

und setzt man weiterhin:

$$(53a)\qquad b = \varrho \sin\beta,\quad c = \varrho\cos\beta,$$

wo β und ϱ sich bestimmen aus

$$(54)\qquad tg\,\beta = \frac{b}{c}\ ^{1}),\quad \varrho = \sqrt{b^2+c^2},$$

so lautet Gl. (52)

---

woraus

$$(h)\qquad B_1 = \frac{(P-R)\,m_2^2\,\gamma}{(m_1+m_2)^2}$$

$$(i)\qquad C_1 = \gamma R + \frac{(P-R)\,m_2^2\,\gamma}{(m_1+m_2)^2};$$

ferner ergeben die Gleichungen für $\frac{d s_1}{d t}$ und $\frac{d s_2}{d t}$

$$A_1\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2 \gamma}} + D_1 = \sqrt{\frac{R(2P-R)\gamma}{m_1}} \text{ und } -A_1\frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2\gamma}} + D_1 = 0,$$

woraus

$$(k)\qquad A_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}\gamma\sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}R(2P-R)}$$

$$(l)\qquad D_1 = \frac{1}{m_1+m_2}\sqrt{\gamma m_1 R(2P-R)}.$$

Mit den Werten aus (h), (i), (k), (l) ergeben die Gleichungen (d) und (g) die Gleichungen (50) und (51), wenn zugleich bedacht wird, dass überall $t-\tau$ an Stelle von t zu setzen ist.

[1]) Der Entscheid für die Wahl zwischen den beiden innerhalb 0 und 2π sich ergebenden Werten von β ist dadurch gegeben, dass aus den Gleichungen (53a) das Vorzeichen von $\sin\beta$ und $\cos\beta$ zu ersehen ist.

$$K = \varrho \left[\sin\beta \sin\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2 \gamma}}(t-\tau) - \cos\beta \cos\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2 \gamma}}(t-\tau)\right] + \frac{R m_1 + P m_2}{m_1+m_2}$$

$$(55)\quad K = \frac{R m_1 + P m_2}{m_1+m_2} - \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}R(2P-R) + \left[\frac{m_2}{m_1+m_2}(P-R)\right]^2} \cos\left[\beta + \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2 \gamma}}(t-\tau)\right].$$

Die auftretenden Schwingungen verlaufen also wieder nach einem reinen Cosinusgesetze. Die Anstrengung K des elastischen Stückes schwankt somit periodisch zwischen denselben Grenzwerten. Nach Gl. (55) betragen diese:

$$(56)\quad \left.\begin{matrix} K_{\max} \\ K_{\min} \end{matrix}\right\} = \frac{R m_1 + P m_2}{m_1+m_2} \pm \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}R(2P-R) + \left[\frac{m_2}{m_1+m_2}(P-R)\right]^2}$$

oder in anderer Form

$$(57)\quad \left.\begin{matrix} K_{\max} \\ K_{\min} \end{matrix}\right\} = \frac{R m_1 + P m_2}{m_1+m_2} \pm \sqrt{\left(\frac{R m_1 + P m_2}{m_1+m_2}\right)^2 - R^2\frac{m_1}{m_1+m_2}}.$$

Diese Gleichung enthält den Nachgiebigkeitsgrad γ nicht. Also sind die Maximal- und Minimalwerte der das elastische Glied beanspruchenden Kraft K unabhängig von dem Grad der Nachgiebigkeit desselben. Damit ist die an sich befremdende Tatsache erwiesen, dass bei konstanter Triebkraft die Grösse der Anstrengung infolge der beim Anlauf eines Triebwerks entstehenden Schwingungen unabhängig ist von dem Grad der Elastizität vorhandener Triebwerkteile. Die Schwingungen treten also bei nahezu ganz starren Triebwerken mit derselben Stärke auf, wie bei solchen mit sehr nachgiebigen Triebwerkteilen.

Der Wert $\frac{R m_1 + P m_2}{m_1+m_2}$ ist der Mittelwert, von dem aus die Beanspruchung um den gleichen Betrag zu- oder abnimmt. Er stellt denjenigen Teil der Triebkraft dar, der zur Beschleunigung der Massen m_2 und zur Überwindung des konstanten Arbeitswiderstandes R gebraucht wird. Der Wurzelwert in den Gleichungen (56) und (57) bestimmt die Grösse der Schwingungsamplitude. Aus Gl. (57) geht hervor, dass dieser Wert stets kleiner oder höchstens gleich dem Mittelwert ist. Gleichheit besteht, wenn der Ausdruck $R^2\frac{m_1}{m_1+m_2}$ verschwindet. Dies ist der Fall, wenn m_1 oder R gleich

Null oder m_2 gleich unendlich ist. Daraus geht hervor, dass die Anstrengung K des Triebwerks den Wert Null nie unterschreitet, dass also trotz der Schwingungen der Durchgang der Kraft immer in derselben Richtung sich vollzieht (s. Schlussbemerkung zu § 2 Abschnitt I), ferner dass im ungünstigsten Falle der Höchstwert der Kraft K der doppelte Mittelwert ist.

Wie aus Gl. (56) weiterhin ersichtlich ist, wächst der Wurzelwert mit dem Bruch $\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$. Die Amplitude der Schwingungen ist also um so grösser, je kleiner der Bruch $\frac{m_1}{m_2}$, d. h. entgegen der Anschauung, je weniger Massen am Motor und je mehr Massen an der Stelle der Kraftabgabe liegen. Solche für die Anstrengung eines Triebwerks sehr ungünstigen Verhältnisse hat man stets bei den Schwenk- und Fahrwerken von Dreh- bezw. Laufkranen, weil dort die reduzierten Massen des zu bewegenden Krangerüstes und der Last die reduzierte Masse des Motorankers bedeutend überwiegen. Dies ist der Grund, warum bei diesen Maschinen die Beanspruchung des Triebwerks beim Anlauf stets ein Mehrfaches der im Beharrungszustand vorhandenen beträgt. Bei den Hubwinden besitzen die Motormassen bei weitem den grössten Einfluss, während der der einzelnen Vorgelege und sogar der der Last fast ganz verschwindet (s. Spalte 7 der Zahlentabelle S. 63), weil hier die Verwendung sehr grosser Übersetzungen üblich ist [s. Gl. (3) S. 4]. Ein rasches Anheben der schwebenden[1]) Last ist deshalb weit weniger gefährlich als ein rasches Anfahren der Bühne bezw. rasches Schwenken des Auslegergerüstes.

Zur Beurteilung, in welcher Weise der Arbeitswiderstand R die Schwingungen beeinflusst, stellen wir die Ableitung des Radikanten von Gl. (56) nach R her und erhalten

$$2\,(P - R)\,\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

Man sieht, dass für die praktisch interessierenden Fälle, d. h. für $P > R$ dieser Ausdruck stets positiv ist, dass also die Schwingungsamplituden mit wachsendem Arbeitswiderstande grösser werden.

Die Zeit des Anlaufs und damit auch die Beschleunigung der in Bewegung kommenden Massen schwankt, mit Ausnahme derjenigen Fälle, wo selbsttätige Anlassvorrichtungen verwendet sind,

---

[1]) Beim Anheben der Last von der Unterlage aus beginnt die Bewegung bei losem Lastseil. Dadurch ändern sich die Verhältnisse, weil die Last im Augenblick des Abhebens einen sehr grossen Beschleunigungswiderstand ausübt.

im allgemeinen auch bei denselben Belastungen sehr beträchtlich, weil hierbei vollständig das Verhalten des Führers massgebend ist. Ausserdem ist es nicht ausgeschlossen, dass hie und da durch besondere Zufälle sehr rasches Ein- oder Ausschalten nötig wird. Mit Rücksicht darauf ist es von Interesse zu untersuchen, in welchem Masse die Grösse der Beschleunigung die Entstehung der Schwingungen begünstigt. Der zur Massenbeschleunigung verfügbare Teil der Triebkraft ist gleich dem Überschuss der Triebkraft über den Arbeitswiderstand R, d. h. gleich $P - R$. Diese Kraft verleiht der vorhandenen gesamten Masse $m_1 + m_2$ folgende mittlere Beschleunigung:

$$p_m = \frac{P - R}{m_1 + m_2}, \tag{58}$$

woraus

$$P = R + p_m (m_1 + m_2). \tag{59}$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichungen (56) und (57) ein, so ergibt sich

$$\left.\begin{matrix} K_{max} \\ K_{min} \end{matrix}\right\} = R + p_m m_2 \pm \sqrt{p_m^2 m_2^2 + 2 p_m m_2 R + \frac{m_2}{m_1 + m_2} R^2} \tag{60}$$

$$\left.\begin{matrix} K_{max} \\ K_{min} \end{matrix}\right\} = R + p_m m_2 \pm \sqrt{(R + p_m m_2)^2 - R^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2}}. \tag{61}$$

Die Anstrengung des Triebwerks im Beharrungszustande, welche nach der üblichen Rechnungsweise für die Abmessungen der Triebwerkteile massgebend ist, entspricht dem Arbeitswiderstand R, also in den Gleichungen (60) und (61) dem ersten Glied. Der Trägheitswiderstand der zu beschleunigenden Massen ist dort berücksichtigt durch das Glied $p_m m_2$, der Einfluss der Schwingungen durch den Wert der Wurzel. Die grösste Anstrengung des Triebwerks in der Anlaufperiode ist also gegenüber der im Beharrungszustand vorhandenen grösser um den Betrag:

$$Z = p_m m_2 + \sqrt{(R + p_m m_2)^2 - R^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2}}, \tag{62}$$

der den bei den üblichen Rechnungen vernachlässigten Wert vorstellt. Dieser nimmt mit der Beschleunigung p_m nach einer Hyperbel zu, die in Fig. 10 durch die Kurve AB dargestellt ist. Die Verhältnisse der Figur sind dem Bühnenfahrwerk des im Abschnitt V eingehend behandelten Laufkrans entnommen. Zum Vergleich ist parallel zur Achse p_m im Abstand $-R$ eine Gerade p'_m gezogen, so dass in dem Koordinatensystem Zp'_m die Ordinaten die gesamte Anstrengung K_{max} darstellen. Man sieht, dass die Kurve sehr rasch und zwar nahezu nach einer

Geraden ansteigt. Bei einer mittleren Winkelbeschleunigung des Motors von 15,7, die 4 Sekunden Anlaufszeit entspricht, beträgt die grösste Anstrengung des Triebwerks das 4fache des dem Arbeitswiderstand entsprechenden Betrages und bei der doppelten Winkelbeschleunigung 31,4, die der üblichen, aber wohl zu nieder gewählten Annahme von 2 Sekunden Anlaufszeit entspricht, schon mehr als das 6fache. Man sieht, dass auch im Interesse der Betriebssicherheit langsames Anfahren geboten ist. Aus dem Umstand, dass aus Gl. (62) mit $p_m = 0$ $Z = R\sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}}$ sich ergibt, geht

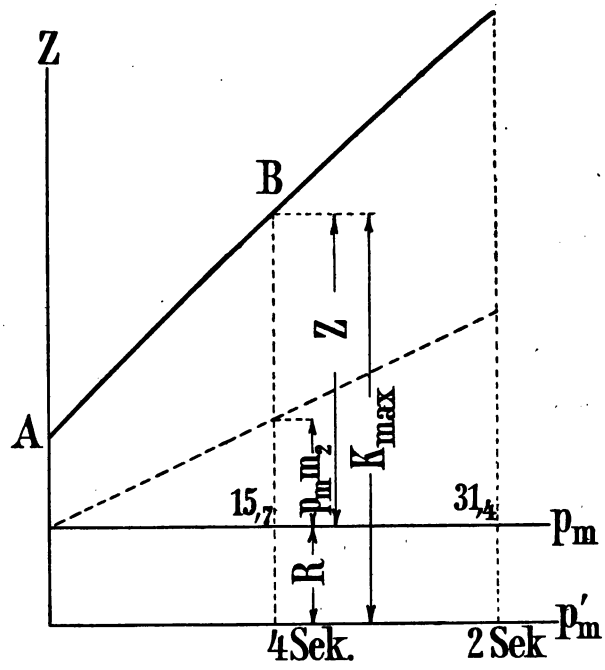

Fig. 10.

hervor, dass auch die grösste Sorgfalt beim Anlassen die Schwingungen nicht fernzuhalten vermag.

Demnach treten beim Anlaufe eines Triebwerks unter allen Umständen Schwingungen auf, deren Einfluss, wie wiederholt hervorgehoben werden möge, um so grösser ist, je mehr Massen (m_2) vom Triebwerk in Bewegung zu setzen sind, und die um so weniger Bedeutung haben, je grösser die Massen (m_1) am Motor sind.

Das Bewegungsgesetz der Massen m_1 und m_2 ist durch die Gleichungen (50) und (51) S. 25 und 26 gegeben. Doch sind weitere Umformungen derselben nötig, um Schlüsse ziehen zu können.

Auf einfachere Weise erhält man lehrreichen Einblick durch unmittelbare Bestimmung der Beschleunigung der beiden Massen. Die jeweils zur Beschleunigung von m_1 und m_2 verfügbare Triebkraft ist $P - K$ bezw. $K - R$. Somit betragen die Beschleunigungen von m_1 und m_2:

$$p_1 = \frac{P-K}{m_1} \tag{63}$$

$$p_2 = \frac{K-R}{m_2}. \tag{64}$$

Der Umstand, dass in diesen beiden Gleichungen die veränderliche Grösse K [s. Gl. (55) S. 28] mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen ist, weist darauf hin, dass die Beschleunigungen und damit auch die Geschwindigkeiten der Massen m_1 und m_2 stets entgegengesetzten Grenzwerten zustreben. Letztere schwingen also stets nach entgegengesetzten Richtungen. Der Phasenwinkel, um den beide Schwingungen verschoben sind, ist demnach gleich 180°. Die Gleichungen (63) und (64) geben mit Gl. (61) S. 30 für p_1 und p_2 als Grenzwerte

$$\left.\begin{matrix} p_{1\max} \\ p_{1\min} \end{matrix}\right\} = p_m \pm \frac{1}{m_1}\sqrt{(R + p_m m_2)^2 - R^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2}} \tag{65}$$

$$\left.\begin{matrix} p_{2\max} \\ p_{2\min} \end{matrix}\right\} = p_m \pm \frac{1}{m_2}\sqrt{(R + p_m m_2)^2 - R^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2}}. \tag{66}$$

Aus Gl. (66) ist ersichtlich, dass $p_{2\max}$ mindestens gleich dem doppelten Mittelwert $2p_m$ und $p_{2\min}$ stets negativ und höchstens gleich Null ist. Die Massen m_2 bewegen sich also in der Weise, dass sie sich abwechselnd in sehr weiten Grenzen beschleunigen und verzögern. Die dadurch wachgerufenen Massenkräfte verdienen besondere Beachtung für den Fall der Bewegung schwerer Bühnen von Laufkranen mit grosser Spannweite, weil sie die Bühne in horizontaler Richtung auf Biegung beanspruchen. Dadurch gerät die Bühne in Eigenschwingungen, die auf die Schwingungen im Triebwerk wieder zurückwirken und diese je nach Lage der Verhältnisse verstärken oder verschwächen. Auf diese Vorgänge ist im nächsten Abschnitt näher eingegangen. Jedoch darf vorausgeschickt werden, dass, wie die berechneten Beispiele zeigen, die Maximalwerte der Anstrengungen mit den aus den Gleichungen (60) oder (61) berechneten sehr gut übereinstimmen, weshalb letztere wegen ihrer Einfachheit den umständlichen Gleichungen des nächsten Abschnitts vorzuziehen sind.

Die Schwingungsdauer, d. h. die zwischen zwei Maximalwerten von K verstreichende Zeit $\mathfrak{T}$, ergibt sich, wenn man beachtet, dass

nach Verlauf dieser Zeit der Bogen des *cos* in Gl. (55) S. 28 um den Wert 2π gewachsen ist:

$$\beta + \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 \gamma}}(\mathfrak{T} + t - \tau) = 2\pi + \beta + \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2 \gamma}}(t - \tau),$$

woraus

$$\mathfrak{T} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2 \gamma}{m_1 + m_2}}. \tag{67}$$

Dieser Ausdruck lässt erkennen, dass die Schwingungsdauer mit dem Nachgiebigkeitsgrad γ des Triebwerks wächst [s. Gl. (36) und (38)]. Schreibt man den Bruch unter der Wurzel $\frac{m_1 m_2 \gamma}{m_1 + m_2}$ in der Form $\frac{\gamma}{\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}}$, so geht weiterhin hervor, dass die Schwingungsdauer bei Vermehrung der Massen m_1 oder m_2 zunimmt. Bei gleicher Gesamtmasse $m_1 + m_2$ ergibt sich die Schwingungsdauer am grössten, wenn $m_1 = m_2$, d. h. wenn die reduzierten Massen auf beiden Seiten des elastischen Glieds die gleichen Werte besitzen.

§ 5. Dynamische Vorgänge beim Anlauf eines Triebwerks mit zwei elastischen Gliedern.

Die bisher gemachte Annahme, dass nur ein vorwiegend als elastisch zu betrachtender Triebwerkteil vorhanden sei, ist genau genommen, in Wirklichkeit oft nicht zutreffend. So stellen z. B. in jedem Räderwerk die einzelnen Vorgelegewellen elastische Stücke dar, zwischen denen die Massen der Zahnräder, Bremsscheiben u. s. f. verteilt sind. Eine eingehende Behandlung dieses Falles stösst auf beträchtliche Schwierigkeiten, weil sehr grosse und deshalb unübersichtliche mathematische Ausdrücke nicht zu vermeiden sind. Es wird an dieser Stelle deshalb nur der Sonderfall eines so grossen Widerstandes R berücksichtigt, dass die Triebkraft zu dessen Überwindung nicht ausreicht. Die Ergebnisse gestatten dann leicht Schlüsse auf den allgemeinen Vorgang zu ziehen.

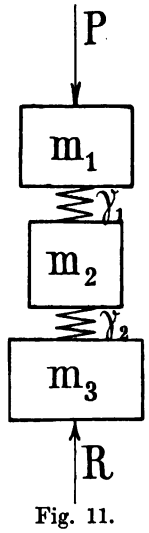

Fig. 11.

Die gewählte Sachlage, dass zwei elastische Glieder mit den reduzierten Nachgiebigkeitsgraden γ_1 und γ_2 zwischen den Massen m_1 und m_2, bezw. m_2 und m_3 vorhanden sind, ist durch die Fig. 11 dargestellt. Für die erste Periode des Anlaufs, auf die sich unsere Untersuchung beschränkt und die sich dadurch kennzeichnet, dass der zu den

Massen m_3 gelangende Teil der Triebkraft zur Überwindung des Arbeitswiderstandes R noch nicht ausreicht und deshalb die Massen m_3 in Ruhe bleiben, ergeben sich auf dieselbe Weise wie früher die Differentialgleichungen

$$(68) \quad \ldots \quad \begin{cases} P - m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} = \frac{s_1 - s_2}{\gamma_1} \\ m_2 \frac{d^2 s_2}{dt^2} = \frac{s_1 - s_2}{\gamma_1} - \frac{s_2}{\gamma_2}, \end{cases}$$

deren Integration, in der in der Fussnote[1]) angegebenen Weise durchgeführt, ergibt:

$$(69) \quad s_1 = (\gamma_1 + \gamma_2) P + P \frac{1 - m_1 \alpha_2 (\gamma_1 + \gamma_2)}{m_1 (\alpha_2 - \alpha_1)} \cos \sqrt{\alpha_1}\, t + P \frac{m_1 \alpha_1 (\gamma_1 + \gamma_2) - 1}{m_1 (\alpha_2 - \alpha_1)} \cos \sqrt{\alpha_2}\, t$$

$$(70) \quad s_2 = \gamma_2 P + P \frac{(1 - m_1 \gamma_1 \alpha_1)\,[1 - m_1 \alpha_2 (\gamma_1 + \gamma_2)]}{m_1 (\alpha_2 - \alpha_1)} \cos \sqrt{\alpha_1}\, t + P \frac{(1 - m_1 \gamma_1 \alpha_2)\,[m_1 \alpha_1 (\gamma_1 + \gamma_2) - 1)]}{m_1 (\alpha_2 - \alpha_1)} \cos \sqrt{\alpha_2}\, t,$$

wobei gesetzt wurde

$$(71) \quad \frac{(m_1 + m_2)\gamma_2 + m_1 \gamma_1 \pm \sqrt{[(m_1 + m_2)\gamma_2 + m_1 \gamma_1]^2 - 4 \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2}}{2 \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2} = \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2. \end{cases}$$

---

[1]) Durch weitere Ableitung nach t und Elimination der Veränderlichen s_2 und ihrer Ableitungen nach t aus den erhaltenen Gleichungen erhält man

$$(a) \quad (\gamma_1 + \gamma_2) P - s_1 - [(m_1 + m_2)\gamma_2 + m_1 \gamma_1] \frac{d^2 s_1}{dt^2} - \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2 \frac{d^4 s_1}{dt^4} = 0;$$

durch weitere Ableitung nach t ergibt sich hieraus:

$$(b) \quad \frac{ds_1}{dt} + [(m_1 + m_2)\gamma_2 + m_1 \gamma_1] \frac{d^3 s_1}{dt^3} + \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2 \frac{d^5 s_1}{dt^5} = 0.$$

Die Integration dieser linearen, homogenen Differentialgleichung geschieht in derselben Weise, wie in den Fussbemerkungen S. 22 und 24 angegeben. Man erhält

$$(c) \quad s_1 = A_1 + B_1 \sin \sqrt{\alpha_1}\, t + C_1 \cos \sqrt{\alpha_1}\, t + D_1 \sin \sqrt{\alpha_2}\, t + E_1 \cos \sqrt{\alpha_2}\, t.$$

Für s_2 ergibt sich nach Elimination von s_1 und deren Ableitungen nach t eine Gleichung von derselben Form und denselben Koeffizienten wie (b). Das Integral lautet dementsprechend nur in den Konstanten von s_1 verschieden:

$$(d) \quad s_2 = A_2 + B_2 \sin \sqrt{\alpha_1}\, t + C_2 \cos \sqrt{\alpha_1}\, t + D_2 \sin \sqrt{\alpha_2}\, t + E_2 \cos \sqrt{\alpha_2}\, t.$$

In den Gleichungen (c) und (d) ist gesetzt

$$(e) \quad \frac{(m_1 + m_2)\gamma_2 + m_1 \gamma_1 \pm \sqrt{[(m_1 + m_2)\gamma_2 + m_1 \gamma_1]^2 - 4 \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2}}{2 \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2} = \begin{cases} \alpha_1, \\ \alpha_2, \end{cases}$$

welche beiden Werte die Wurzeln der aus (b) sich ergebenden quadratischen Gleichung sind

$$1 - [(m_1 + m_2)\gamma_2 + \gamma_1 m_1]\, \alpha + \gamma_1 \gamma_2 m_1 m_2 \alpha^2 = 0.$$

Hierin bezieht sich α_1 auf das positive, α_2 auf das negative Vorzeichen vor der Wurzel.

Aus den Gleichungen (69) und (70) ergibt sich nun unmittelbar als jeweilige Anstrengung der beiden elastischen Glieder:

$$(72)\quad K_1 = \frac{s_1 - s_2}{\gamma_1} = P + \frac{P}{\alpha_2 - \alpha_1}\Big\{\alpha_1\left[1 - m_1\,\alpha_2\,(\gamma_1+\gamma_2)\right]\cos\sqrt{\alpha_1}\,t + \alpha_2\left[m_1\,\alpha_1\,(\gamma_1+\gamma_2) - 1\right]\cos\sqrt{\alpha_2}\,t\Big\}$$

$$(73)\quad K_2 = \frac{s_2}{\gamma_2} = P + \frac{P}{\gamma_2\, m_1\,(\alpha_2 - \alpha_1)}$$
$$\Big\{(1 - m_1\,\alpha_1\,\gamma_1)\left[1 - m_1\,\alpha_2\,(\gamma_1+\gamma_2)\right]\cos\sqrt{\alpha_1}\,t + (1 - m_1\,\alpha_2\,\gamma_1)\left[m_1\,\alpha_1\,(\gamma_1+\gamma_2) - 1\right]\cos\sqrt{\alpha_2}\,t\Big\}.$$

Die Kräfte K_1 und K_2 ändern sich also nicht mehr nach einem reinen Cosinusgesetz wie früher, sondern die den Gleichungen (72) und (73) entsprechenden Kurven haben einen unregelmässigeren Verlauf. Sie ergeben sich aus der Addition zweier Cosinuslinien,

---

Die noch unbekannten Integrationskonstanten bestimmen sich nun in der folgenden Weise: Man stellt die Ableitungen $\frac{d^2 s_1}{dt^2}$ und $\frac{d^4 s_1}{dt^4}$ aus (c) her, setzt die erhaltenen Ausdrücke in (a) ein und erhält

$$(f)\qquad A_1 = (\gamma_1 + \gamma_2)\,P.$$

Ferner ergibt sich mit den Ausdrücken für s_1, s_2 und $\frac{d^2 s_1}{dt^2}$ aus der ersten der Gleichungen (68) durch Koeffizientenvergleichung:

$$(g)\quad \begin{cases} \frac{A_1 - A_2}{\gamma_1} = P, & \text{woraus } A_2 = A_1 - \gamma_1 P = \gamma_2 P \\ \frac{B_1 - B_2}{\gamma_1} = m_1 B_1 \alpha_1, & \text{„ } B_2 = B_1(1 - m_1\gamma_1\alpha_1) \\ \frac{C_1 - C_2}{\gamma_1} = m_1 C_1 \alpha_1, & \text{„ } C_2 = C_1(1 - m_1\gamma_1\alpha_1) \\ \frac{D_1 - D_2}{\gamma_1} = m_1 D_1 \alpha_2, & \text{„ } D_2 = D_1(1 - m_1\gamma_1\alpha_2) \\ \frac{E_1 - E_2}{\gamma_1} = m_1 E_1 \alpha_2, & \text{„ } E_2 = E_1(1 - m_1\gamma_1\alpha_2). \end{cases}$$

Die noch unbekannten Konstanten B_1, C_1, D_1, E_1 bestimmen sich aus der Erwägung, dass für

$$t = 0,\quad s_1 = 0,\quad \frac{ds_1}{dt} = 0,\quad s_2 = 0,\quad \frac{ds_2}{dt} = 0 \text{ wird,}$$

zu

$$B_1 = 0,\qquad C_1 = P\frac{1 - m_1\,\alpha_2\,(\gamma_1+\gamma_2)}{m_1\,(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

$$D_1 = 0,\qquad E_1 = P\frac{m_1\,\alpha_1\,(\gamma_1+\gamma_2) - 1}{m_1\,(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

womit nach den Beziehungen (g) auch A_2, B_2, C_2, D_2 und E_2 bestimmt sind.

deren Amplitude sich teils addiert, teils subtrahiert. Die sich einstellenden Maximal- und Minimalwerte erhält man offenbar, wenn man in den Gleichungen (72) und (73) die Summe der Koeffizienten der beiden *cos* zum Absolutglied addiert bezw. davon abzieht. Führt man diese Rechnung durch, so erhält man

$$K_{1\,max} = 2P, \quad K_{1\,min} = 0$$
$$K_{2\,max} = 2P, \quad K_{2\,min} = 0.$$

Die S. 23 für das Triebwerk mit einem elastischen Gliede gefundenen Grenzwerte stimmen hiermit vollständig überein. Es liegt deshalb nahe, zu vermuten, dass auch für die zweite Periode des Anlaufs, in der die Masse m_3 in Bewegung gerät, hinsichtlich der Grenzwerte die Ergebnisse des vorigen Paragraphen mit grosser Annäherung übertragbar sind. Da ausserdem bei allen Fahrwerken, (Laufkranen, Drehkranen, Strassenbahnwagen u. s. f.), die reduzierte Masse der übertragenden Räder sehr klein ist gegen die der Motormassen und des Wagens, so können die Vorgelegewellen als ein zusammenhängendes elastisches Glied aufgefasst werden und die im vorigen Paragraphen entwickelten Gleichungen führen zu völlig brauchbaren Ergebnissen. Dadurch ist eine bedeutende Vereinfachung für die Rechnung erzielt, denn nach den Darlegungen S. 28 verlangt die Bestimmung der Grenzwerte die Kenntnis des Nachgiebigkeitsgrades eines Triebwerks nicht, sondern man kann stets ganz davon absehen, wieviel Triebwerkteile als nachgiebig anzusehen sind und in welchem Masse sie diese Nachgiebigkeit besitzen.

Der Vollständigkeit halber seien an dieser Stelle indessen die zur genauen, allgemeinen Behandlung des Falles zweier elastischer Triebwerkteile erforderlichen Gleichungen angeführt. Man hat das simultane System von Differentialgleichungen

$$(74) \quad \ldots \quad \begin{cases} P - m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} = \frac{s_1 - s_2}{\gamma_1} \\ m_2 \frac{d^2 s_2}{dt^2} = \frac{s_1 - s_2}{\gamma_1} - \frac{s_2 - s_3}{\gamma_2} \\ R + m_3 \frac{d^2 s_3}{dt^2} = \frac{s_2 - s_3}{\gamma_2}. \end{cases}$$

§ 6. Dämpfung der Schwingungen.

Die Beobachtung lehrt, dass die beim Anlauf entstehenden Schwingungen nur im Augenblick des Entstehens in voller Stärke vorhanden sind und dann sofort abnehmen. Diese Dämpfung, die

bei den mathematischen Untersuchungen nicht berücksichtigt wurde, hat ihre Ursache einerseits in der unvollkommenen Elastizität des Materials, andererseits — und dies ist wohl die Hauptursache — in der schon in § 2 Abschnitt I besprochenen Veränderlichkeit der reduzierten Masse, die durch die Veränderlichkeit des Wirkungsgrads hervorgerufen wird. Bei konstanten Reibungsverlusten entsprechen die entwickelten Gleichungen den tatsächlichen Verhältnissen fast ohne Einschränkung, weil die Reibungsverluste durch Einführung des Wirkungsgrads in den Ausdruck für die reduzierte Masse [s. Gl. (3) S. 4] berücksichtigt sind. Da aber beim Anlauf stets die Reibungsverluste abnehmen, so vermindert sich auch der Wert der reduzierten Masse. Wenn man nun bedenkt, dass der Vorgang des Schwingens darin besteht, dass eine gewisse Energiemenge sich abwechselnd in Massenenergie und Formänderungsarbeit umsetzt, so folgt aus der Abnahme des Wertes der reduzierten Masse, dass von den schwingenden Massen stets mehr Bewegungsenergie aufgenommen wird, als sie imstande sind abzugeben und wieder in Formänderungsarbeit umzusetzen, d. h. dass die Schwingungen gedämpft werden. In welchem Masse sich Dämpfungserscheinungen geltend machen, vermögen nur Versuche[1]) zu entscheiden. In solchen Fällen, wo infolge des Schwingens sich die Massen m_2 periodisch so stark verzögern [s. Gl. (66) S. 32], dass nach kurzem Anlauf eine augenblickliche Rückwärtsbewegung, d. h. eine Abnahme der Geschwindigkeit unter Null erfolgt, wirkt der Umstand weiterhin noch dämpfend, dass der Arbeitswiderstand R seine Richtung wechselt.

Günstig für die Erhaltung der Schwingungen, also für die Erhaltung der hohen Grenzwerte der Anstrengung des Triebwerks für eine längere Zeit, ist die früher festgestellte Tatsache (s. S. 29 und S. 36), dass die Anstrengung des Triebwerks trotz der Schwingungen nicht unter Null sinkt, d. h. der Kraftdurchgang immer in derselben Richtung sich vollzieht. Dadurch bleiben etwa vorhandene, selbsthemmende Eigenschaften des Triebwerks und der Spielraum an der Eingriffsstelle der Zähne wirkungslos. Also werden Stösse vermieden.

[1]) Lehrreichen Einblick erhält man auch auf analytischem Wege durch Einführung eines sogenannten Dämpfungsfaktors, indem man die dämpfenden Widerstände proportional dem Geschwindigkeitsunterschied $\frac{ds_1}{dt} - \frac{ds_2}{dt} = \frac{d(s_1 - s_2)}{dt}$ der Massen m_1 und m_2 nämlich gleich $k \frac{d(s_1 - s_2)}{dt}$ setzt, worin der Dämpfungsfaktor k konstant und gleich dem dämpfenden Widerstand für den Geschwindigkeitsunterschied $\frac{d(s_1 - s_2)}{dt} = 1$ cm/sec. ist.

§ 7. Allgemeines über die Vorgänge während des Anlaufs bei nicht konstanter Triebkraft.

Gegen die Darlegungen in § 4 und 5 kann vor allem der Einwand erhoben werden, dass nur in sehr wenigen der praktisch möglichen Fälle die Triebkraft konstant sei. Um in den allgemeinen Fall, bei welchen die Triebkraft sich ändert, einigen Einblick zu bekommen, werde der Vorgang bei einem beliebigen Verlauf der Triebkraft für die im ersten Moment des Anlaufs vorhandenen einfachen Verhältnisse untersucht, wo nur die Motormassen m_1 in Bewegung sind (s. S. 21 bis 23). Die Triebkraft ändere sich mit der Zeit nach der algebraischen Funktion:

$$(75)\quad P = f_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n,$$

worin a_0, a_1, a_2, $\ldots a_{n-1}$, a_n konstante Koeffizienten bedeuten. Da nun (s. Gl. (42) S. 21)

$$P - m_1 \frac{d^2 s_1}{d t^2} - \frac{s_1}{\gamma} = 0,$$

so erhält man

$$(76)\quad f_n(t) - m_1 \frac{d^2 s_1}{d t^2} - \frac{s_1}{\gamma} = 0.$$

Leitet man diese Gleichung $(n + 1)$ mal ab, so ergibt sich

$$(77)\quad - m_1 \frac{d^{n+3} s_1}{d t^{n+3}} - \frac{1}{\gamma} \frac{d^{n+1} s_1}{d t^{n+1}} = 0,$$

d. h. eine lineare, homogene Differentialgleichung, deren Integral von der Form

$$(78)\quad s_1 = A \sin \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}}\, t + B \cos \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}}\, t + C + Dt + Et^2 + \ldots + Ft^n,$$

wo A, B, C, D, $E \ldots F$ Integrationskonstante sind.

Diese bestimmen sich aus der Überlegung, dass mit $t = 0$, $s_1 = 0$ und $\frac{d s_1}{d t} = 0$ sein muss und dass der Ausdruck für s_1 aus Gl. (78) und dessen zweite Ableitung nach t die Gleichung (76) für jeden Wert von t befriedigen müssen. Dabei ergeben sich für A und B Werte, die im allgemeinen nicht gleich Null sind.

Das Vorhandensein der periodischen Funktionen *sin* und *cos* in Gl. (78) beweist, dass die Bewegung von m_1 in Schwingungen vor sich geht, deren Amplitude von der Grösse der Koeffizienten A und B abhängt.

Da nun jede mathematische Funktion in eine (im allgemeinen unendliche) Reihe von steigenden Potenzen der Veränderlichen, also in eine Funktion von der Form der Gl. (75) entwickelt werden

kann, so erhält man bei der Untersuchung der Vorgänge für einen ganz beliebigen Verlauf der Triebkraft im allgemeinen die Glieder mit *cos* und *sin*, deren Erscheinen das Vorhandensein von Schwingungen unwiderleglich dartut.

Man ersieht hieraus, dass Bewegung nicht in der Weise entsteht, wie man es sich vorzustellen geneigt ist, und wie auch allgemein der Berechnung von Maschinen zugrunde gelegt wird, nämlich dass in jedem Augenblick Proportionalität besteht zwischen Beanspruchung der Maschine und Grösse der Triebkraft und zwischen Beschleunigung und Überschuss der Triebkraft über den Arbeitswiderstand. Die Darlegungen in § 4 und die am Schlusse der Arbeit folgenden Zahlenbeispiele zeigen, dass hierbei die Verhältnisse viel zu günstig beurteilt werden, weil man auf Grund dieser Anschauung nur die Mittelwerte erhält, um die die tatsächlichen Werte in weiten Grenzen nach oben und unten fortwährend schwanken.

Angesichts dieser Tatsache ist nicht zu bezweifeln, dass manche rätselhafte Brüche sich lediglich als die Folge von Schwingungen erklären, die infolge ungünstiger Verhältnisse sich in hohem Masse ausbilden konnten. Dies erscheint um so wahrscheinlicher, als gerade bei den wichtigsten Maschinengattungen, nämlich den Schwungradmaschinen, der Arbeitsvorgang in einer fortwährenden Beschleunigung und Verzögerung von Massen, d. h. An- und Auslauf besteht. An Hand des Tangentialdruckdiagramms dieser Maschinen ist es möglich, sich Aufschluss über die sich abspielenden Vorgänge zu verschaffen.[1]) Sehr lehrreich ist in dieser Hinsicht die Arbeit von Frahm, die die Schwingungen in den Wellenleitungen von Schiffsmaschinen behandelt.[2])

---

[1]) Dieses wird mit Hilfe des Fourierschen Satzes in mehrere Sinuslinien zerlegt, deren Einfluss je für sich festgestellt wird. Dabei wird ganz in derselben Weise wie in § 4 vorgegangen. Die Vorgänge in Schwungradmaschinen beanspruchen deshalb ein besonderes Interesse, weil noch Resonanzerscheinungen auftreten können, die die Beanspruchung der Maschine in sehr hohem Masse steigern. Dieser Fall tritt ein, wenn die Schwingungszeit der elastischen Schwingungen zur Umlaufszeit der Kurbelwelle in einem einfachen Verhältnis $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ u. s. f.) steht. (Vergl. auch die Arbeit von Frahm.)

[2]) Siehe Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Jahrgang 1902 S. 797 und 880 oder die Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 6.

Dritter Abschnitt.

Einfluss der Elastizität der Gerüstkonstruktion auf die Beanspruchung des Triebwerks und der Gerüste.

Die Untersuchungen dieses und des nächsten Abschnitts werden in erster Linie zu dem Zweck angestellt, damit später an Hand von praktischen Beispielen festgestellt werden kann, ob bei Fahrtriebwerken die durch die Elastizität der Gerüstkonstruktion und die freie Aufhängung der Last bedingten Abweichungen von den im letzten Abschnitt behandelten Vorgängen wesentlich andere Anstrengungen des Triebwerks verursachen, als sie aus den Gleichungen (57) oder (61) sich ergeben. Dabei ist beabsichtigt, die Brauchbarkeit der erwähnten Gleichungen auch für diese Fälle darzutun. Der Endzweck dieser Abschnitte wird also erst im letzten Abschnitt bei Berechnung der Beispiele erreicht. In zweiter Linie sollen die beiden Abschnitte ermöglichen, auch die Anstrengungen der Gerüste ziffernmässig festzustellen, und schliesslich einige Einsicht in bisher ungeklärte, interessante Vorgänge gewähren.

Die bei Hebemaschinen der grösseren Bauart üblichen Gerüstkonstruktionen bringen infolge ihrer Nachgiebigkeit ähnliche Vorgänge zur Entstehung, wie die im letzten Abschnitt behandelten elastischen Triebwerkteile. Bei Beginn einer Fahrbewegung, z. B. des Bühnenfahrens eines Laufkrans, wird durch Massenwiderstände eine Belastung der Bühne erzeugt, die eine gewisse Durchbiegung des Gerüstes in horizontaler Richtung und zwar entgegengesetzt zur Fahrrichtung verlangt. Die zur Erzeugung dieser Durchbiegung eintretende Eigenbewegung der Gerüstmassen muss sich wegen des Trägheitswiderstands der letzteren über diejenige Lage hinaus fortsetzen, in der die vorhandenen Beschleunigungskräfte der erreichten Durchbiegung entsprechen. Wie ein schwingendes Pendel ist das Gerüst nun fortwährend bestrebt, seine Mittellage einzunehmen, ohne sie aber dauernd zu erreichen.

Entsprechend dem Vorgehen im vorigen Abschnitt wird zunächst die Beziehung zwischen der Durchbiegung und der biegenden Kraft aufgestellt.

§ 1. Gesetz der Abhängigkeit der Durchbiegung von der ihr entsprechenden Kraft. — Nachgiebigkeitsgrad der Gerüstkonstruktion.

Obwohl die Massenkräfte über das ganze Gerüst verteilt sind, so wird im folgenden die biegende Kraft doch stets in einem Punkt wirkend angenommen. Der gemachte Fehler ist gering, weil stets der Massenwiderstand der Katze als zentrisch wirkend angenommen werden kann und ausserdem die Bühne in der Mitte stärker gehalten ist. Für Lauf- bezw. Drehkrane ergeben sich also die in den Figuren 12 und 13 skizzierten Belastungsarten, die man sich in diesem Fall als Grundrisse vorzustellen hat. Mit den dort ein-

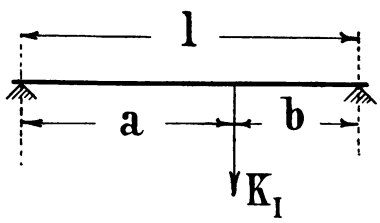

Fig. 12.

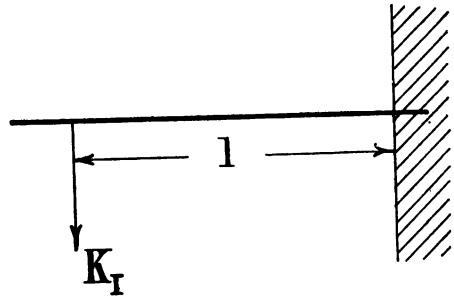

Fig. 13.

getragenen Bezeichnungen folgt für die am Aufhängepunkt der Last vorhandene Durchbiegung für den Fall der Fig. 12

$$s = \frac{\alpha}{\Theta} \frac{a^2 b^2}{3 l} K_I \text{ [1]} \tag{79}$$

und für den Fall der Fig. 13

$$s' = \frac{\alpha}{\Theta} \frac{l^3}{3} K_I \text{ [1]}. \tag{80}$$

Setzt man nun hierin

$$\left.\begin{aligned} \gamma_I &\equiv \frac{\alpha}{\Theta} \frac{a^2 b^2}{3 l} \\ \gamma_I' &\equiv \frac{\alpha}{\Theta} \frac{l^3}{3}, \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

[1]) Die Gleichung ergibt sich als das Integral der bekannten Differentialgleichung $\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{\alpha}{\Theta} K_I x$.

wobei γ_I und γ_I' für bestimmte Verhältnisse als konstant gelten können, so erhält man

$$(82) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} s = \gamma_I K_I \\ s' = \gamma_I' K_I. \end{cases}$$

Der Vergleich mit den Gleichungen (37) und (39) S. 17 und 18 lässt erkennen, dass die Vorgänge in den Gerüsten denselben Grundgesetzen unterliegen, wie diejenigen im Triebwerk. Die Koeffizienten γ_I und γ_I' können ihrer Natur nach wieder als Nachgiebigkeitsgrade der Gerüstkonstruktion bezeichnet werden. Sie entsprechen vollständig dem Nachgiebigkeitsgrad γ des Triebwerks.

Wie sich aus Gl. (81) ergibt, ändert sich, im Gegensatz zum Verhalten des Nachgiebigkeitsgrades des Triebwerks, die Grösse der Nachgiebigkeit des Gerüstes mit der Lage des Aufhängepunktes der Last, d. h. der Stellung der Katze.

§ 2. Anlauf der Bühne ohne Last.

Um von den Einflüssen der Pendelbewegungen der Last am Lastseil absehen zu können, wird zunächst die Fahrbewegung bei unbelastetem Krangerüste untersucht.

Es sei der Betrachtung das Fahrtriebwerk eines Laufkrans zugrunde gelegt und es bezeichne

γ den reduzierten Nachgiebigkeitsgrad des Triebwerks,

γ_I den reduzierten Nachgiebigkeitsgrad der Bühne gegen horizontale Kräfte, der sich wie γ aus Gl. (40) S. 19 bestimmt[1]), wenn dort für γ_k der tatsächliche Wert des Nachgiebigkeitsgrades eingesetzt wird,

m_1 den reduzierten Wert der vor den elastischen Triebwerkteilen liegenden Massen,

m_2 den reduzierten Wert der hinter den elastischen Triebwerkteilen liegenden Triebwerkmassen und der Bühnenwangen,

m_3 die reduzierte Masse des übrigen Teils der Bühne und der Katze,

P die treibende Kraft,

R den zur Überwindung des konstanten Fahrwiderstands der Bühne aufzuwendenden Teil von P,

s_1, s_2, s_3 die jeweils von den Massen m_1, m_2, m_3 zurückgelegten Wege.

---

[1]) Die Bestimmung von γ_I für vorhandene Ausführungen ist S. 47 und 48 angegeben.

Die Sachlage entspricht der Figur 14. An den Massen m_1 wirkt die Kraft P, an den Massen m_2 der dem Fahrwiderstand entsprechende Widerstand R, zwischen beiden Massen liegt ein elastisches Stück von der Nachgiebigkeit γ und ebenso sind die Massen m_2 und m_3 durch das elastische Glied von der Nachgiebigkeit γ_I verbunden.

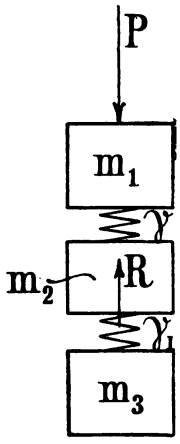

Fig. 14.

Der Anlauf vollzieht sich zunächst genau in derselben Weise wie bei den im letzten Abschnitt behandelten Vorgängen. Im ersten Augenblick sind wieder nur die Massen m_1 in Bewegung, nämlich so lange, als der Druck in dem zwischen m_1 und m_2 liegenden nachgiebigen Stück den Wert R noch nicht erreicht hat. Man erhält für diese erste Periode, wie S. 21 angegeben, die Differentialgleichung

$$(42) \qquad P - \frac{s_1}{\gamma} - m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} = 0,$$

deren Integral wiederum lautet

$$(43) \qquad s_1 = \gamma P \left(1 - \cos \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}}\, t\right),$$

so dass als die nach t Sekunden in dem elastischen Stück vorhandene Anstrengung sich ergibt

$$(45) \qquad K = P\left(1 - \cos \sqrt{\frac{1}{m_1 \gamma}}\, t\right).$$

Die Massen m_2 und damit auch m_3 kommen erst in Bewegung, wenn $K = R$ wird, also wenn die Massen m_1 den Weg

$$(46) \qquad s_\tau = \gamma R$$

zurückgelegt haben. Die bis dahin verstrichene Zeit beträgt nach Gl. (47) S. 23

$$(47) \qquad \tau = \sqrt{m_1 \gamma}\, arc\, cos \frac{P - R}{P},$$

ferner nach Gl. (48) S. 23 die dann vorhandene Geschwindigkeit der Massen m_1

$$(48) \qquad \left|\frac{ds_1}{dt}\right|_{t=\tau} = v_\tau = \sqrt{\frac{R\,(2P - R)\,\gamma}{m_1}}.$$

Nachdem nun sämtliche Massen in Bewegung sind, so wird die Formänderung der elastischen Stücke naturgemäss durch die Differenz der Wege ihrer Endpunkte gemessen, d. h. der Wege s_1, s_2, s_3. Man erhält dann [s. Gl. (37a) S. 23]:

$$(37\,a) \qquad s_1 - s_2 = \gamma K$$

$$(83) \qquad s_2 - s_3 = \gamma_I K_I, \text{ oder}$$

$$(83\,a) \qquad K = \frac{s_1 - s_2}{\gamma}, \quad K_I = \frac{s_2 - s_3}{\gamma_I}.$$

Auf dieselbe Weise wie früher (s. S. 24) ergeben sich nun die Beziehungen:

$$(84)\quad \ldots \quad \begin{cases} P - m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} = \frac{s_1 - s_2}{\gamma} \\ R + m_2 \frac{d^2 s_2}{dt^2} = \frac{s_1 - s_2}{\gamma} - \frac{s_2 - s_3}{\gamma_I} \\ m_3 \frac{d^2 s_3}{dt^2} = \frac{s_2 - s_3}{\gamma_I}. \end{cases}$$

Die Integration dieses Systems von Differentialgleichungen nach der untenstehenden mathematischen Umformung[1]) durchgeführt, ergibt

$$(85)\quad K = \frac{P(m_2 + m_3) + R m_1}{m_1 + m_2 + m_3} + a \sin \sqrt{\alpha_1}\,(t - \tau) - b \cos \sqrt{\alpha_1}\,(t - \tau) - c \sin \sqrt{\alpha_2}\,(t - \tau) + d \cos \sqrt{\alpha_2}\,(t - \tau),$$

---

[1]) Die Elimination von s_2, s_3 und deren Ableitungen nach t aus Gl. (84) ergibt folgende Differentialgleichung:

$$(a)\quad P - R - (m_1 + m_2 + m_3)\frac{d^2 s_1}{dt^2} - [\gamma m_1 (m_2 + m_3) + \gamma_I m_3 (m_1 + m_2)]\frac{d^4 s_1}{dt^4} - \gamma \gamma_I m_1 m_2 m_3 \frac{d^6 s_1}{dt^6} = 0,$$

durch deren weitere Ableitung folgt:

$$(b)\quad (m_1 + m_2 + m_3)\frac{d^3 s_1}{dt^3} + [\gamma m_1 (m_2 + m_3) + \gamma_I m_3 (m_1 + m_2)]\frac{d^5 s_1}{dt^5} + \gamma \gamma_I m_1 m_2 m_3 \frac{d^7 s_1}{dt^7} = 0.$$

Mit $s_1 = e^{rt}$ wird $\frac{d^3 s_1}{dt^3} = r^3 e^{rt}$, $\frac{d^5 s_1}{dt^5} = r^5 e^{rt}$, $\frac{d^7 s_1}{dt^7} = r^7 e^{rt}$, so dass Gl. (b) liefert

$$(c)\quad (m_1 + m_2 + m_3) r^3 + [\gamma m_1 (m_2 + m_3) + \gamma_I m_3 (m_1 + m_2)] r^5 + \gamma \gamma_I m_1 m_2 m_3 r^7 = 0,$$

woraus

$$r = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \pm i \sqrt{\alpha_1} \\ \pm i \sqrt{\alpha_2}, \end{cases}$$

wobei gesetzt ist

(d)

$$\frac{\gamma m_1 (m_2 + m_3) + \gamma_I m_3 (m_1 + m_2) \pm \sqrt{[\gamma m_1 (m_2 + m_3) - \gamma_I m_3 (m_1 + m_2)]^2 + 4 \gamma \gamma_I m_1^2 m_2^2}}{2 \gamma \gamma_I m_1 m_2 m_3} = \begin{cases} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{cases}$$

und α_1 auf das positive, α_2 auf das negative Vorzeichen der Wurzel sich bezieht. Es ergibt sich nun als allgemeines Integral der Gl. (b):

$$(e)\quad s_1 = A_1 \sin \sqrt{\alpha_1}\, t + B_1 \cos \sqrt{\alpha_1}\, t + C_1 \sin \sqrt{\alpha_2}\, t + D_1 \cos \sqrt{\alpha_2}\, t + E_1 + F_1 t + G_1 t^2,$$

wo A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1 Integrationskonstante sind.

wobei τ sich aus Gl. (47) S. 43 bestimmt und gesetzt wurde:

$$(86\,a) \qquad a \equiv \frac{(1-\gamma m_1 \alpha_2)(1-\gamma_I m_3 \alpha_1)}{\sqrt{\alpha_1}\,(\alpha_1-\alpha_2)(\gamma m_1-\gamma_I m_3)} \sqrt{\frac{R(2P-R)}{m_1 \gamma}}$$

Für s_2 und s_3 erhält man aus Gl. (84) eine Differentialgleichung von derselben Form und denselben Koeffizienten wie (a). Die Integrale können also nur in den Konstanten von (e) verschieden sein:

$$(f) \qquad s_2 = A_2 \sin\sqrt{\alpha_1}\,t + B_2 \cos\sqrt{\alpha_1}\,t + C_2 \sin\sqrt{\alpha_2}\,t + D_2 \cos\sqrt{\alpha_2}\,t + E_2 + F_2 t + G_2 t^2,$$

$$(g) \qquad s_3 = A_3 \sin\sqrt{\alpha_1}\,t + B_3 \cos\sqrt{\alpha_1}\,t + C_3 \sin\sqrt{\alpha_2}\,t + D_3 \cos\sqrt{\alpha_2}\,t + E_3 + F_3 t + G_3 t^2.$$

Aus (a) in Verbindung mit (e), (f) und (g) und ihren Ableitungen nach t folgt nun

$$G_1 = G_2 = G_3 = \frac{P-R}{2(m_1+m_2+m_3)}.$$

Setzt man die Werte für s_1, s_2, s_3 aus (e), (f) und (g) und deren zweite Ableitungen nach t in die erste und dritte Gleichung von (84) ein, so ergibt sich, wenn man die Koeffizienten von $\sin\sqrt{\alpha_1}\,t$, $\cos\sqrt{\alpha_1}\,t$ u. s. f. gleich Null setzt:

$$m_1 A_1 \alpha_1 = \frac{1}{\gamma}(A_1 - A_2), \quad \text{woraus} \quad A_1 - A_2 = \frac{\gamma m_1 \alpha_1}{1-\gamma m_1 \alpha_1} A_2$$

$$m_1 B_1 \alpha_1 = \frac{1}{\gamma}(B_1 - B_2), \quad \text{„} \quad B_1 - B_2 = \frac{\gamma m_1 \alpha_1}{1-\gamma m_1 \alpha_1} B_2$$

$$m_1 C_1 \alpha_2 = \frac{1}{\gamma}(C_1 - C_2), \quad \text{„} \quad C_1 - C_2 = \frac{\gamma m_1 \alpha_2}{1-\gamma m_1 \alpha_2} C_2$$

$$m_1 D_1 \alpha_2 = \frac{1}{\gamma}(D_1 - D_2), \quad \text{„} \quad D_1 - D_2 = \frac{\gamma m_1 \alpha_2}{1-\gamma m_1 \alpha_2} D_2$$

$$P - 2 m_1 G_1 = \frac{1}{\gamma}(E_1 - E_2), \quad \text{„} \quad E_1 - E_2 = \frac{P(m_2+m_3)+R m_1}{m_1+m_2+m_3}\gamma$$

$$F_1 - F_2 = 0, \qquad F_1 - F_2 = 0,$$

ferner

$$-m_3 A_3 \alpha_1 = \frac{1}{\gamma_I}(A_2 - A_3), \quad \text{woraus} \quad A_2 - A_3 = -\frac{\gamma_I m_3 \alpha_1}{1-\gamma_I m_3 \alpha_1} A_2$$

$$-m_3 B_3 \alpha_1 = \frac{1}{\gamma_I}(B_2 - B_3), \quad \text{„} \quad B_2 - B_3 = -\frac{\gamma_I m_3 \alpha_1}{1-\gamma_I m_3 \alpha_1} B_2$$

$$-m_3 C_3 \alpha_2 = \frac{1}{\gamma_I}(C_2 - C_3), \quad \text{„} \quad C_2 - C_3 = -\frac{\gamma_I m_3 \alpha_2}{1-\gamma_I m_3 \alpha_2} C_2$$

$$-m_3 D_3 \alpha_2 = \frac{1}{\gamma_I}(D_2 - D_3) \quad \text{„} \quad D_2 - D_3 = \frac{\gamma_I m_3 \alpha_2}{1-\gamma_I m_3 \alpha_2} D_2$$

$$2 m_3 G_3 = \frac{1}{\gamma_I}(E_2 - E_3), \quad \text{„} \quad E_2 - E_3 = (P-R)\frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}\gamma_I$$

$$F_2 - F_3 = 0, \qquad F_2 - F_3 = 0.$$

Hierbei wurden die Differenzen $A_2 - A_3$ u. s. f. gebildet, weil, wie sich aus Gl. (83a) ergibt, die jeweilige Anstrengung des elastischen Stücks γ, d. h. des Triebwerks beträgt

$$K = \frac{s_1 - s_2}{\gamma} = \frac{A_1 - A_2}{\gamma} \sin\sqrt{\alpha_1}\,t + \frac{B_1 - B_2}{\gamma} \cos\sqrt{\alpha_1}\,t + \ldots + \frac{G_1 - G_2}{\gamma} t^2$$

$$(86b)\quad b \equiv \frac{[(m_2+m_3)(1-\gamma m_1 \alpha_2)+m_1(1-\gamma_I m_3 \alpha_2)](1-\gamma_I m_3 \alpha_1)}{(m_1+m_2+m_3)(\alpha_1-\alpha_2)(\gamma m_1-\gamma_I m_3)}(P-R)$$

$$(86c)\quad c \equiv \frac{(1-\gamma m_1 \alpha_1)(1-\gamma_I m_3 \alpha_2)}{\sqrt{\alpha_2}(\alpha_1-\alpha_2)(\gamma m_1-\gamma_I m_3)}\sqrt{\frac{R(2P-R)}{m_1 \gamma}}$$

---

und des elastischen Stücks γ_I, d. h. des Gerüsts

$$K_I = \frac{s_2 - s_3}{\gamma_I} = \frac{A_2 - A_3}{\gamma_I} \sin\sqrt{\alpha_1}\, t + \frac{B_2 - B_3}{\gamma_I} \cos\sqrt{\alpha_1}\, t + \ldots + \frac{G_2 - G_3}{\gamma_I} t^2,$$

und weil die Integrale s_1, s_2, s_3 noch umständlichere Ausdrücke bilden.

Damit erhält man

$$(h)\quad K = \frac{m_1 \alpha_1}{1-\gamma m_1 \alpha_1} A_2 \sin\sqrt{\alpha_1}\, t + \frac{m_1 \alpha_1}{1-\gamma m_1 \alpha_1} B_2 \cos\sqrt{\alpha_1}\, t + \frac{m_1 \alpha_2}{1-\gamma m_1 \alpha_2} C_2 \sin\sqrt{\alpha_2}\, t + \frac{m_1 \alpha_2}{1-\gamma m_1 \alpha_2} D_2 \cos\sqrt{\alpha_2}\, t + \frac{P(m_2+m_3)+R m_1}{m_1+m_2+m_3},$$

$$(i)\quad K_I = \frac{-m_3 \alpha_1}{1-\gamma_I m_3 \alpha_1} A_2 \sin\sqrt{\alpha_1}\, t - \frac{m_3 \alpha_1}{1-\gamma_I m_3 \alpha_1} B_2 \cos\sqrt{\alpha_1}\, t - \frac{m_3 \alpha_2}{1-\gamma_I m_3 \alpha_2} C_2 \sin\sqrt{\alpha_2}\, t - \frac{m_3 \alpha_2}{1-\gamma_I m_3 \alpha_2} D_2 \cos\sqrt{\alpha_2}\, t + (P-R)\frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

Hierin sind nur noch die Konstanten A_2, B_2, C_2, D_2 unbekannt. Wie in der Fussbemerkung S. 26 geschehen, bestimmt man diese in der Weise, dass die sich für K und K_I ergebenden Gleichungen sich auf ein um $+\tau$ verschobenes Koordinatensystem beziehen. Die richtige Form der Gleichungen wird einfach erhalten, wenn man wieder $t-\tau$ statt t einsetzt. Man beachtet nun, dass für $t = 0$ sich ergeben muss

$$K = R, \quad K_I = 0,$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{ds_1}{dt} = \sqrt{\frac{R(2P-R)}{m_1 \gamma}}, \quad \frac{dK_I}{dt} = 0$$

[s. Gl. (48) S. 43].

Man erhält also vier Gleichungen. Aus diesen ergibt sich:

$$B_2 = -\frac{[(m_2+m_3)(1-\gamma m_1 \alpha_2)+m_1(1-\gamma_I m_3 \alpha_2)](1-\gamma m_1 \alpha_1)(1-\gamma_I m_3 \alpha_1)}{m_1(m_1+m_2+m_3)(\alpha_1-\alpha_2)\alpha_1(\gamma m_1-\gamma_I m_3)}(P-R)$$

$$D_2 = \frac{[(m_2+m_3)(1-\gamma m_1 \alpha_1)+m_1(1-\gamma_I m_3 \alpha_1)](1-\gamma m_1 \alpha_2)(1-\gamma_I m_3 \alpha_2)}{m_1(m_1+m_2+m_3)(\alpha_1-\alpha_2)\alpha_2(\gamma m_1-\gamma_I m_3)}(P-R)$$

$$A_2 = \frac{(1-\gamma m_1 \alpha_1)(1-\gamma m_1 \alpha_2)(1-\gamma_I m_3 \alpha_1)}{m_1(\alpha_1-\alpha_2)\alpha_1\sqrt{\alpha_1}(\gamma m_1-\gamma_I m_3)}\sqrt{\frac{R(2P-R)}{m_1 \gamma}}$$

$$C_2 = -\frac{(1-\gamma m_1 \alpha_1)(1-\gamma m_1 \alpha_2)(1-\gamma_I m_3 \alpha_2)}{m_1(\alpha_1-\alpha_2)\alpha_2\sqrt{\alpha_2}(\gamma m_1-\gamma_I m_3)}\sqrt{\frac{R(2P-R)}{m_1 \gamma}}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen (h) und (i) ein, so ergeben sich die Gleichungen (85) und (88) mit den in (86) und (89) angegebenen Koeffizienten, wenn man zugleich $t-\tau$ statt t setzt.

(86 d)

$$d \equiv \frac{[(m_2 + m_3)(1 - \gamma m_1 \alpha_1) + m_1 (1 - \gamma_I m_3 \alpha_1)](1 - \gamma_I m_3 \alpha_2)}{(m_1 + m_2 + m_3)(\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma m_1 - \gamma_I m_3)} (P - R)$$

(87)

$$\left.\begin{matrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{matrix}\right\} = \frac{\gamma m_1 (m_2 + m_3) + \gamma_I m_3 (m_1 + m_2) \pm \sqrt{[\gamma m_1 (m_2 + m_3) - \gamma_I m_3 (m_1 + m_2)]^2 + 4 \gamma \gamma_I m^2_1 m^2_3}}{2 \gamma \gamma_I m_1 m_2 m_3};$$

α_1 bezieht sich auf das positive, α_2 auf das negative Vorzeichen vor der Wurzel.

Weiterhin ergibt sich für die Anstrengung K_I des Gerüsts

(88)

$$K_I = (P - R) \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} - a_I \sin \sqrt{\alpha_1}(t - \tau) + b_I \cos \sqrt{\alpha_1}(t - \tau) + c_I \sin \sqrt{\alpha_2}(t - \tau) - d_I \cos \sqrt{\alpha_2}(t - \tau),$$

worin gesetzt ist:

(89 a)

$$a_I \equiv \frac{m_3 (1 - \gamma m_1 \alpha_1)(1 - \gamma m_1 \alpha_2)}{m_1 \sqrt{\alpha_1} (\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma m_1 - \gamma_I m_3)} \sqrt{\frac{R (2P - R)}{m_1 \gamma}}$$

(89 b)

$$b_I \equiv \frac{m_3 [(m_2 + m_3)(1 - \gamma m_1 \alpha_2) + m_1 (1 - \gamma_I m_3 \alpha_2)](1 - \gamma m_1 \alpha_1)}{m_1 (m_1 + m_2 + m_3)(\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma m_1 - \gamma_I m_3)} (P - R)$$

(89 c)

$$c_I \equiv \frac{m_3 (1 - \gamma m_1 \alpha_1)(1 - \gamma m_1 \alpha_2)}{m_1 \sqrt{\alpha_2} (\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma m_1 - \gamma_I m_3)} \sqrt{\frac{R (2P - R)}{m_1 \gamma}}$$

(89 d)

$$d_I \equiv \frac{m_3 [(m_2 + m_3)(1 - \gamma m_1 \alpha_1) + m_1 (1 - \gamma_I m_3 \alpha_1)](1 - \gamma m_1 \alpha_2)}{m_1 (m_1 + m_2 + m_3)(\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma m_1 - \gamma_I m_3)} (P - R).$$

Die Berechnung der Koeffizienten a, b, c, d und a_I, b_I, c_I, d_I nach den Gleichungen (86) und (89) erscheint zunächst sehr umständlich. Wie man jedoch sieht, wiederholen sich in diesen Ausdrücken sämtliche Faktoren. Einigen Schwierigkeiten begegnet die Bestimmung des Nachgiebigkeitsgrades γ_I der Bühne, besonders wenn der Querschnitt letzterer sehr unregelmässig ist oder wenn die Bühne aus Fachwerksträgern besteht. Für vorhandene Ausführungen hilft man sich hierbei auf einfache Weise durch Versuche. Man bestimmt die Schwingungszahl N der künstlich in Schwingungen versetzten Bühne am einfachsten mit Hilfe des Frahmschen Geschwindigkeitsmessers [1]) oder in der Weise, dass man die Schwingungen auf einer mit konstanter und bekannter Geschwindigkeit rotierenden Scheibe aufzeichnet. Die Schwingungs-

[1]) Siehe Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, Jahrg. 1904 S. 1580.

zahl N ist dann die Anzahl der Schwingungen auf einer Strecke von der Länge der Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe. Dann benützt man, dass der reziproke Wert der Schwingungszahl, d. h. die Schwingungszeit $\mathfrak{T}$ sich ergibt aus

$$\frac{1}{N} = \mathfrak{T} = 2\pi\sqrt{\gamma_I m_s}, \tag{90a}$$

woraus

$$\gamma_I m_s = \left(\frac{\mathfrak{T}}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\pi N}\right)^2, \tag{90b}$$

womit auch γ_I bestimmt ist.

Diese Schwingungen der Bühne können in der Weise hervorgerufen werden, dass man bei festgekeilten Laufrädern von Katze und Bühne die Bühne in horizontaler Richtung etwa mit Hilfe eines Flaschenzugs, dessen Haken durch ein kurzes Seilstück mit der Katze verbunden ist, auf Biegung beansprucht, dann durch Durchschneiden des Seilstücks die Bühne plötzlich entlastet.

Wenn P die Seilspannung ist beim Durchschneiden des Seilstücks, deren Grösse aber nicht gemessen zu werden braucht, so erhält man auf dieselbe Weise wie früher das Schwingungsgesetz mit Hilfe der Differentialgleichung

$$K_I = P - \frac{s_s}{\gamma_I} = m_s \frac{d^2 s_s}{dt^2}$$

oder

$$P - \frac{s_s}{\gamma_I} - m_s \frac{d^2 s_s}{dt^2} = 0.$$

Diese Differentialgleichung hat dieselbe Form wie Gl. (42) S. 21. Ihr Integral ergibt sich auf ähnliche Weise zu

$$s_s = \gamma_I P \left(1 - \cos\sqrt{\frac{1}{\gamma_I m_s}}\, t\right).$$

Da die Schwingungszeit diejenige Zeitdauer ist, innerhalb welcher der *cos* wieder den Anfangswert annimmt, so ergibt sie sich aus

$$\sqrt{\frac{1}{\gamma_I m_s}}\,(t + \mathfrak{T}) = 2\pi + \sqrt{\frac{1}{\gamma_I m_s}}\, t,$$

woraus man Gl. (90a) erhält.

Wenn der Koeffizient γ_I bekannt ist, so steht im allgemeinen nichts mehr im Wege mit den Gleichungen (85) bis (89) die dynamischen Vorgänge beim Anlauf eines unbelasteten Lauf- oder Drehkrans zu bestimmen. In den Gleichungen für K und K_I lassen sich, wie S. 27 für einen andern Fall schon geschehen ist, je die Glieder mit dem *sin* und *cos* desselben Winkels zusammenfassen. Man erhält dann

$$(91)\quad K = \frac{P(m_2+m_3)+Rm_1}{m_1+m_2+m_3} - \sqrt{a^2+b^2}\cos[\beta_1+\sqrt{\alpha_1}(t-\tau)] + \sqrt{c^2+d^2}\cos[\beta_2+\sqrt{\alpha_2}(t-\tau)]$$

$$(92)\quad K_I = (P-R)\frac{m_3}{m_1+m_2+m_3} + \sqrt{a_I^2+b_I^2}\cos[\beta_1'+\sqrt{\alpha_1}(t-\tau)] - \sqrt{c_I^2+d_I^2}\cos[\beta_2'+\sqrt{\alpha_2}(t-\tau)],$$

wo β_1 und β_2 bezw. β_1' und β_2' sich bestimmen aus:

$$(93)\qquad tg\,\beta_1 = \frac{a}{b},\quad tg\,\beta_2 = \frac{c}{d}\ ^{1}),$$

bezw.

$$(94)\qquad tg\,\beta_1' = \frac{a_I}{b_I},\quad tg\,\beta_2' = \frac{c_I}{d_I}\ ^{1}).$$

Der Umstand, dass in den Gleichungen (91) und (92) die periodische Funktion *cos* zweimal erscheint, beweist, dass die im Triebwerk und in der Bühne vorhandenen Schwingungen zu betrachten sind als die Folge zweier Einzel- oder Grundschwingungen, die jede für sich einem reinen Cosinusgesetz unterliegen. Die Grundschwingungen im Triebwerk und in der Bühne haben die gleichen Schwingungszahlen, die nach Gl. (91) und (92) betragen

$$(95)\qquad N_1 = \frac{\sqrt{\alpha_1}}{2\pi},\quad N_2 = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{2\pi}.$$

Hieraus geht hervor, dass zu jeder Grundschwingung im Triebwerk eine zugeordnete in der Bühne vorhanden ist und umgekehrt.

Da α_1 und α_2 wegen des positiven Vorzeichens unter der Wurzel in Gl. (87) S. 47 nie gleich sind, so wirken diese Grundschwingungen zu verschiedenen Zeiten verschieden aufeinander ein, d. h. bald verstärkend, bald verschwächend (s. Fig. 25 S. 76).

Aus den Gleichungen (85) bis (89) lassen sich die im Abschnitt II untersuchten einfacheren Vorgänge als Sonderfälle ableiten. Die dazu nötigen Entwicklungen bieten jedoch nichts Neues; es genüge deshalb dieser Hinweis.

In den Gleichungen (86) und (89) erscheint im Nenner sämtlicher Ausdrücke der Faktor $\gamma m_1 - \gamma_I m_3$. Es ist nun von besonderem Interesse, den Fall ins Auge zu fassen, wo dieses Glied zu Null wird, d. h.

$$\gamma m_1 = \gamma_I m_3$$

weil zu erwarten ist, dass sich hierbei besonders ungünstige Verhältnisse einstellen werden.

---

[1]) Zu beachten ist, dass gemäss der Fussbemerkung[1]) S. 27 sich stets nur ein Wert für β_1, β_2, β_1', β_2' zwischen Null und 2π ergibt.

Entsprechend Gl. (90a) stellen die Werte

$$\mathfrak{T}_1 = 2\pi\sqrt{\gamma m_1}$$
$$\mathfrak{T}_3 = 2\pi\sqrt{\gamma_I m_3}$$

die Schwingungszeiten derjenigen Schwingungen dar, die entstehen, wenn die Massen m_2 festgehalten und die Massen m_1 und m_3 in Bewegung gesetzt werden. Da also die Gleichheit von γm_1 und $\gamma_I m_3$ die Gleichheit dieser Schwingungszeiten in sich schliesst, so liegt in gewissem Sinne der Fall der Resonanz vor.

Aus Gl. (87) ergibt sich mit $\gamma m_1 = \gamma_I m_3$

$$\alpha_1 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\gamma m_1 m_2} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\gamma_I m_3 m_2}$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{\gamma m_1} = \frac{1}{\gamma_I m_3}.$$

Damit nehmen die Koeffizienten a, b, c, d und a_I, b_I, c_I, d_I in Gl. (86) und (89) zunächst die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, weil mit $\gamma m_1 - \gamma_I m_3$ auch die Faktoren $1 - \gamma m_1\, \alpha_2$ und $1 - \gamma_I m_3\, \alpha_2$, die im Zähler stehen, zu Null werden. Durch eine eingehende Untersuchung, die hier auszuführen der Raum nicht gestattet, fand Verfasser, dass in diesem Fall

$$\frac{1 - \gamma m_1 \alpha_2}{\gamma m_1 - \gamma_I m_3} = \frac{-1}{\gamma (m_1 + m_3)}$$
$$\frac{1 - \gamma_I m_3 \alpha_2}{\gamma m_1 - \gamma_I m_3} = \frac{1}{\gamma_I (m_1 + m_3)}.$$

Damit nehmen die Koeffizienten a, b, c, d und a_I, b_I, c_I, d_I in Gl. (86) und (89) sehr einfache Werte an, die, in die Gleichungen (91) und (92) eingesetzt, als Gesetz der Beanspruchung des Triebwerks bezw. der Bühne ergeben

(96)

$$K = \frac{P(m_2 + m_3) + R m_1}{m_1 + m_2 + m_3} - \frac{m_1}{m_1 + m_3}\sqrt{\frac{R(2P - R)m_2}{m_1 + m_2 + m_3} + \left[\frac{(P - R)m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\right]^2}$$
$$\cos\left[\beta_1 + \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + m_3}{\gamma m_1 m_2}}\,(t - \tau)\right] - \frac{m_3}{m_1 + m_3} P \cos\sqrt{\frac{1}{\gamma m_1}}\, t,$$

(97)

$$K_I = \frac{(P - R)m_3}{m_1 + m_2 + m_3} + \frac{m_3}{m_1 + m_3}\sqrt{\frac{R(2P - R)m_2}{m_1 + m_2 + m_3} + \left[\frac{(P - R)m_2}{m_1 + m_2 + m_3}\right]^2}$$
$$\cos\left[\beta_1 + \sqrt{\frac{m_1 + m_2 + m_3}{\gamma m_1 m_2}}\,(t - \tau)\right] - \frac{m_3}{m_1 + m_3} P \cos\sqrt{\frac{1}{\gamma m_1}}\, t,$$

wo β_1 der aus

(98) $$tg\,\beta_1 = \sqrt{\frac{R(2P - R)(m_1 + m_2 + m_3)}{(P - R)^2 m_2}}$$

innerhalb 0 und $\frac{\pi}{2}$ sich ergebende Wert ist.

Die sich einstellenden Höchst- und Mindestwerte der Anstrengung erhält man annähernd, wenn man die Summe der Koeffizienten der beiden *cos* zum Absolutglied addiert, bezw. davon abzieht. Führt man dies in Gl. (96) durch, so findet man, dass auch in diesem ungünstigen Fall der Resonanz die Anstrengung im Triebwerk im allgemeinen den Betrag $2P$ nicht erreicht und ferner unter Null nie sinkt. Letzterer Umstand ist, wie schon vielfach hervorgehoben wurde, für die Erhaltung der Schwingungen günstig.

Vierter Abschnitt.

Einfluss der freien Aufhängung der Last auf die Beanspruchung des Triebwerks und des Gerüstes.

Bei Beginn einer Fahrbewegung kann die Beschleunigung der Last erst dann erfolgen, wenn die Seilspannung eine horizontale Komponente von der Grösse der notwendigen Beschleunigungskraft besitzt, also wenn das Seil aus seiner vertikalen Lage ausgewichen ist. Im Augenblick des Anlaufs hat infolgedessen die Last sofort das Bestreben, die der Beschleunigung des Aufhängepunkts entsprechende Lage einzunehmen; sie schwingt aus, ist aber wegen der Trägheit ihrer Masse nicht imstande, in dieser Lage zu verbleiben, sondern die bei der Ausschwingung aufgenommene Bewegungsenergie zwingt sie, die Mittellage zu überschreiten. Bei der endlich erreichten äussersten Stellung ist nun Gleichgewicht nicht mehr vorhanden, infolgedessen muss die Rückwärtsbewegung erfolgen. Man sieht, es entstehen Pendelbewegungen der Last, die das Triebwerk und die Bühne wechselnd beanspruchen.

§ 1. Gesetz der Abhängigkeit der Beschleunigungskraft der Last von der Grösse der Ausschwingung. — Nachgiebigkeitsgrad des Pendels.

Bezeichnet mit Bezug auf Fig. 15 zur Zeit t

s_r die Grösse der Ausschwingung,

K die jeweils an der Last wirkende Beschleunigungskraft,

m_4 die Masse der Last,

l die Entfernung des Schwingungsmittelpunkts[1]) der Last vom Aufhängepunkt,

---

[1]) Ist e die Entfernung des Schwerpunkts der Last vom Aufhängepunkt, Θ das Trägheitsmoment der Last, bezogen auf die zur Fahrrichtung senkrechte horizontale Schwerpunktsachse, so ist

$$l = e + \frac{\Theta}{m_4 e}.$$

δ den jeweiligen Winkel des Seils mit der Vertikalen,
g die Erdbeschleunigung in *cm*,
so ist $K = m_4 g \, tg \, \delta$,
ferner $s_r = l \sin \delta$.

Da δ stets sehr klein ist, so kann gesetzt werden:

$$tg \, \delta = \sin \delta.$$

Damit ergibt sich durch Elimination von $tg \, \delta$ und $\sin \delta$:

$$s_r = \frac{l}{m_4 g} K.$$

Setzt man nun

$$\gamma_l = \frac{l}{m_4 g}, \tag{99}$$

so wird

$$s_r = \gamma_l K. \tag{100}$$

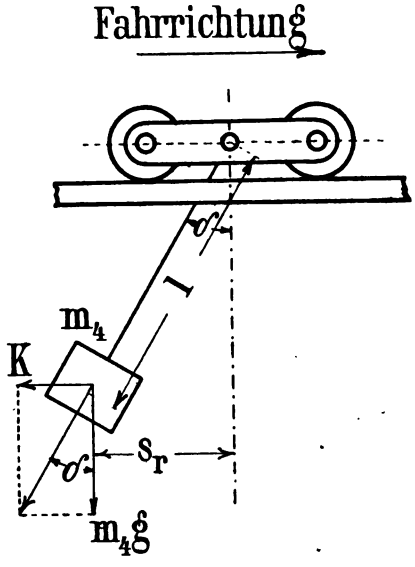

Fig. 15.

Die Übereinstimmung dieser Gleichung mit den Gleichungen (37), (39), (82) bestätigt, dass Pendelbewegungen und elastische Formänderungen demselben Grundgesetz unterliegen: Zwischen Kraft und Weg des Angriffspunktes der Kraft besteht Proportionalität. Die Grösse γ_l ist die Grösse der Ausschwingung, die der Krafteinheit entspricht. Der Koeffizient γ_l kann demnach übereinstimmend mit der früheren Auffassung als Nachgiebigkeitsgrad des Pendels bezeichnet werden. Er ändert sich, wie aus Gl. (99) hervorgeht, mit der Seillänge und der Grösse der Last, hat also für dieselbe Ausführung, entgegengesetzt dem Verhalten des Nachgiebigkeitsgrades des Triebwerks, fortlaufend andere Werte.

§ 2. **Anlauf bei verhältnismässig starrem Gerüste.**

Die folgenden Darlegungen gelten ohne Einschränkung für die Katzenfahrt, weil der Kranwagen als nicht nachgiebig angesehen werden kann.

Ist m_2' die reduzierte Masse der Katze, und werden im übrigen die früheren Bezeichnungen verwendet, so entspricht der zu untersuchende Fall dem in der schematischen Skizze (Fig. 16) angegebenen. An den Massen m_1 des Motors wirkt die Triebkraft P,

an den Massen m_2' — in entgegengesetzter Richtung — der konstante Fahrwiderstand R. Zwischen beiden Massen befindet sich als elastisches Glied von der Nachgiebigkeit γ das Fahrtriebwerk. An die Masse der Katze ist durch das nachgiebige Lastseil γ_l die Masse m_4 der Last angeschlossen.

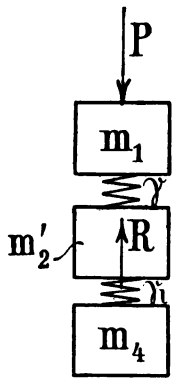

Fig. 16.

Wir erinnern uns, dass sich für den Fall des Anlaufs der unbelasteten, elastischen Bühne dieselbe schematische Figur (s. Fig. 14) ergab. Hieraus schliessen wir, dass die dynamischen Vorgänge in beiden Fällen vollständig sich entsprechen. Die in § 2 des vorigen Abschnitts entwickelten Gleichungen gelten also auch hier ohne Einschränkung, wenn gesetzt wird für den Wert der Masse m_2 der Bühnenwangen der der Masse m_2' der Katze, für den Wert der Masse m_3 der Katze und Bühne der der Masse m_4 der Last und für den Nachgiebigkeitsgrad γ_I der Bühne der der pendelnden Last γ_l. Von Interesse ist in erster Linie die Anstrengung des Triebwerks, die sich aus Gl. (85) mit den in (86) und (87) angegebenen Koeffizienten berechnet. Es genüge, auf diese Beziehungen hingewiesen zu haben, ohne sie hier nochmals anzuführen. Die im vorigen Abschnitt gezogenen Schlüsse sind auch ohne weiteres auf diesen Fall übertragbar. Da der Einfluss der Last [s. Gl. (99)] je nach Grösse der Last und Länge des Lastseils ein wechselnder ist, so kann hier der S. 49 bis 51 behandelte Fall der Gleichheit von γm_1 und $\gamma_l m_4$, d. h. in gewissem Sinne der Schwingungszahlen der Motormassen und der Last, leicht eintreten.

§ 3. Anlauf bei vollbelastetem, nachgiebigem Gerüste.

Hier treten die Eigenschwingungen der Triebwerkmassen, des Gerüstes und der Last einflussnehmend auf.

Der Vorgang vollzieht sich in der den früher behandelten Fällen entsprechenden Weise. Solange die Formänderung der Triebwerkteile den dem Fahrwiderstand R entsprechenden Betrag nicht erreicht hat, sind nur die Massen m_1 in Bewegung und es gelten in dieser ersten Periode des Anlaufs wieder die schon mehrfach erwähnten Gleichungen:

$$K = P\left(1 - \cos\sqrt{\frac{1}{m_1\gamma}}\, t\right) \tag{45}$$

$$s_r = \gamma R \tag{46}$$

$$\tau = \sqrt{m_1 \gamma}\ arc\ cos \frac{P-R}{P} \tag{47}$$

$$v_\tau = \sqrt{\frac{R(2P-R)}{m_1}\gamma}. \tag{48}$$

In der nach τ Sekunden Anlaufszeit eintretenden zweiten Periode des Anlaufs kommen allmählich sämtliche Massen in Bewegung. Die eintretende Formänderung, und damit auch die Beanspruchung der elastischen Glieder entspricht nun der Differenz der Wege der Endpunkte letzterer. Da die Differenz der Beanspruchung zweier aufeinanderfolgenden elastischen Glieder gleich ist der algebraischen Summe der an der zwischenliegenden Masse wirkenden Kräfte, so lassen sich folgende Gleichungen aufstellen:

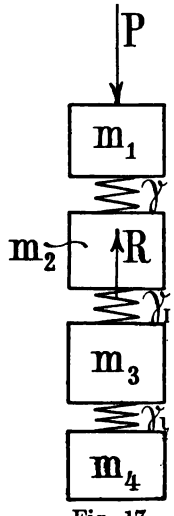

Fig. 17.

$$(101)\quad \begin{cases} P - m_1 \frac{d^2 s_1}{dt^2} = \frac{s_1 - s_2}{\gamma} \\ R + m_2 \frac{d^2 s_2}{dt^2} = \frac{s_1 - s_2}{\gamma} - \frac{s_2 - s_3}{\gamma_I} \\ m_3 \frac{d^2 s_3}{dt^2} = \frac{s_2 - s_3}{\gamma_I} - \frac{s_3 - s_4}{\gamma_I} \\ m_4 \frac{d^2 s_4}{dt^2} = \frac{s_3 - s_4}{\gamma_I}. \end{cases}$$

Die untenstehende Umformung[1]) ergibt hieraus als Gesetz der Beanspruchung des Triebwerks

---

[1]) Die mehrmalige Ableitung der Gleichungen (101) nach t und die Elimination von s_2, s_3, s_4 und deren zweiten, vierten, sechsten und achten Ableitungen aus den dann vorhandenen Gleichungen ergibt die folgende Differentialgleichung, die neben t nur die Veränderliche s_1 enthält:

$$\begin{aligned} (a)\quad 0 = {} & P - R - (m_1 + m_2 + m_3 + m_4) \frac{d^2 s_1}{dt^2} \\ & - \left[\gamma m_1 (m_2 + m_3 + m_4) + \gamma_I (m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + \gamma_I m_4 (m_1 + m_2 + m_3)\right] \frac{d^4 s_1}{dt^4} \\ & - \left[\gamma \gamma_I m_1 m_2 (m_3 + m_4) + \gamma_I \gamma_I m_3 m_4 (m_1 + m_2) + \gamma_I \gamma\, m_1 m_4 (m_2 + m_3)\right] \frac{d^6 s_1}{dt^6} \\ & - \gamma \gamma_I \gamma_I m_1 m_2 m_3 m_4 \frac{d^8 s_1}{dt^8}. \end{aligned}$$

Nach einmaliger Ableitung dieser Gleichung nach t verschwindet das Glied $P - R$ und man erhält eine lineare, homogene Differentialgleichung, die von derselben Form ist, wie die in den Fussbemerkungen S. 22, 24, 34, 44 gelösten. Man erhält als allgemeines Integral:

$$\begin{aligned} (b)\quad s_1 = {} & A_1 \sin \sqrt{\alpha_1}\, t + B_1 \cos \sqrt{\alpha_1}\, t + C_1 \sin \sqrt{\alpha_2}\, t + D_1 \cos \sqrt{\alpha_2}\, t \\ & + E_1 \sin \sqrt{\alpha_3}\, t + F_1 \cos \sqrt{\alpha_3}\, t + G_1 + H_1 t + J_1 t^2, \end{aligned}$$

wobei A_1, B_1, . . . J_1 Integrationskonstanten und α_1, α_2, α_3 die Wurzeln der kubischen Gleichung (105) S. 57 sind.

$$(102)\quad K = \frac{m_1 \alpha_1}{1-\gamma m_1 \alpha_1}\left[A_2 \sin\sqrt{\alpha_1}\,(t-\tau) + B_2 \cos\sqrt{\alpha_1}\,(t-\tau)\right]$$
$$+ \frac{m_1 \alpha_2}{1-\gamma m_1 \alpha_2}\left[C_2 \sin\sqrt{\alpha_2}\,(t-\tau) + D_2 \cos\sqrt{\alpha_2}\,(t-\tau)\right]$$
$$+ \frac{m_1 \alpha_3}{1-\gamma m_1 \alpha_3}\left[E_2 \sin\sqrt{\alpha_3}\,(t-\tau) + F_2 \cos\sqrt{\alpha_3}\,(t-\tau)\right]$$
$$+ \frac{P(m_2+m_3+m_4)+Rm_1}{m_1+m_2+m_3+m_4},$$

Die Ausdrücke für s_2, s_3, s_4 lauten ebenso wie (b) und sind nur in den Konstanten verschieden. Wir geben diesen Konstanten je den Index 2, 3, 4 statt 1. In Verbindung mit den Gleichungen für s_1, s_2, s_3, s_4 gibt nun die Gl. (a)

$$(c)\qquad J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = \frac{P-R}{2(m_1+m_2+m_3+m_4)}.$$

Da die Beanspruchungen K, K_I und K_I der elastischen Glieder

$$(d)\qquad K = \frac{s_1-s_2}{\gamma} = \frac{A_1-A_2}{\gamma}\sin\sqrt{\alpha_1}\,t + \ldots + \frac{H_1-H_2}{\gamma}t$$

$$(e)\qquad K_I = \frac{s_2-s_3}{\gamma_I} = \frac{A_2-A_3}{\gamma_I}\sin\sqrt{\alpha_1}\,t + \ldots + \frac{H_2-H_3}{\gamma_I}t$$

$$(f)\qquad K_I = \frac{s_3-s_4}{\gamma_I} = \frac{A_3-A_4}{\gamma_I}\sin\sqrt{\alpha_1}\,t + \ldots + \frac{H_3-H_4}{\gamma_I}t,$$

so interessieren nur die Differenzen $A_1 - A_2$ u. s. f. der Integrationskonstanten. Setzt man nun in die Gleichungen (101) die für s_1, s_2, s_3 und deren Ableitungen nach t erhaltenen Ausdrücke ein, so ergeben sich durch Koeffizientenvergleichung Beziehungen, aus denen sich jene Differenzen leicht, z. B. in Funktion von A_2 B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2, H_2 ausdrücken lassen.

$$\left.\begin{matrix}A_1-A_2\\B_1-B_2\end{matrix}\right\} = \frac{\gamma m_1 \alpha_1}{1-\gamma m_1 \alpha_1}\cdot\left\{\begin{matrix}A_2\\B_2\end{matrix}\right.,\qquad \left.\begin{matrix}C_1-C_2\\D_1-D_2\end{matrix}\right\} = \frac{\gamma m_1 \alpha_2}{1-\gamma m_1 \alpha_2}\cdot\left\{\begin{matrix}C_2\\D_2\end{matrix}\right.,$$

$$\left.\begin{matrix}E_1-E_2\\F_1-F_2\end{matrix}\right\} = \frac{\gamma m_1 \alpha_3}{1-\gamma m_1 \alpha_3}\cdot\left\{\begin{matrix}E_2\\F_2\end{matrix}\right.,\qquad G_1-G_2 = \frac{P(m_2+m_3+m_4)+Rm_1}{m_1+m_2+m_3+m_4}\gamma,$$

$$H_1 - H_2 = 0,$$

ferner

$$\left.\begin{matrix}A_2-A_3\\B_2-B_3\end{matrix}\right\} = \gamma_I \alpha_1\left(m_2 + \frac{m_1}{1-\gamma m_1 \alpha_1}\right)\cdot\left\{\begin{matrix}A_2\\B_2\end{matrix}\right.,$$

$$\left.\begin{matrix}C_2-C_3\\D_2-D_3\end{matrix}\right\} = \gamma_I \alpha_2\left(m_2 + \frac{m_1}{1-\gamma m_1 \alpha_2}\right)\cdot\left\{\begin{matrix}C_2\\D_2\end{matrix}\right.,$$

$$\left.\begin{matrix}E_2-E_3\\F_2-F_3\end{matrix}\right\} = \gamma_I \alpha_3\left(m_2 + \frac{m_1}{1-\gamma m_1 \alpha_3}\right)\cdot\left\{\begin{matrix}E_2\\F_2\end{matrix}\right.,$$

$$G_2 - G_3 = \frac{\gamma_I (P-R)(m_3+m_4)}{m_1+m_2+m_3+m_4},\qquad H_2 - H_3 = 0,$$

endlich

$$\left.\begin{matrix}A_3-A_4\\B_3-B_4\end{matrix}\right\} = \gamma_I \alpha_1\left[(m_2+m_3-\gamma_I m_2 m_3 \alpha_1) + m_1\frac{1-\gamma_I m_3 \alpha_1}{1-\gamma m_1 \alpha_1}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}A_2\\B_2\end{matrix}\right.,$$

$$\left.\begin{matrix}C_3-C_4\\D_3-D_4\end{matrix}\right\} = \gamma_I \alpha_2\left[(m_2+m_3-\gamma_I m_2 m_3 \alpha_2) + m_1\frac{1-\gamma_I m_3 \alpha_2}{1-\gamma m_1 \alpha_2}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}C_2\\D_2\end{matrix}\right.,$$

$$\left.\begin{matrix}E_3-E_4\\F_3-F_4\end{matrix}\right\} = \gamma_I \alpha_3\left[(m_2+m_3-\gamma_I m_2 m_3 \alpha_3) + m_1\frac{1-\gamma_I m_3 \alpha_3}{1-\gamma m_1 \alpha_3}\right]\cdot\left\{\begin{matrix}E_2\\F_2\end{matrix}\right.,$$

$$G_3 - G_4 = \frac{\gamma_I (P-R) m_4}{m_1+m_2+m_3+m_4},\qquad H_3 - H_4 = 0.$$

ferner als Gesetz der Anstrengung der Bühne

(103)

$$K_I = \alpha_1\left(m_2 + \frac{m_1}{1-\gamma m_1 \alpha_1}\right)\left[A_2 \sin\sqrt{\alpha_1}\,(t-\tau) + B_2 \cos\sqrt{\alpha_1}\,(t-\tau)\right]$$
$$+ \alpha_2\left(m_2 + \frac{m_1}{1-\gamma m_1 \alpha_2}\right)\left[C_2 \sin\sqrt{\alpha_2}\,(t-\tau) + D_2 \cos\sqrt{\alpha_2}\,(t-\tau)\right]$$
$$+ \alpha_3\left(m_2 + \frac{m_1}{1-\gamma m_1 \alpha_3}\right)\left[E_2 \sin\sqrt{\alpha_3}\,(t-\tau) + F_2 \cos\sqrt{\alpha_3}\,(t-\tau)\right]$$
$$+ \frac{(P-R)(m_3+m_4)}{m_1+m_2+m_3+m_4}$$

und endlich als jeweilige Beschleunigungskraft der Last

(104)
$$K_l = \alpha_1\left[(m_2 + m_3 - \gamma_I m_2 m_3 \alpha_1) + m_1\frac{1-\gamma_I m_3 \alpha_1}{1-\gamma m_1 \alpha_1}\right]$$
$$\left[A_2 \sin\sqrt{\alpha_1}\,(t-\tau) + B_2 \cos\sqrt{\alpha_1}\,(t-\tau)\right]$$
$$+ \alpha_2\left[(m_2 + m_3 - \gamma_I m_2 m_3 \alpha_2) + m_1\frac{1-\gamma_I m_3 \alpha_2}{1-\gamma m_1 \alpha_2}\right]$$
$$\left[C_2 \sin\sqrt{\alpha_2}\,(t-\tau) + D_2 \cos\sqrt{\alpha_2}\,(t-\tau)\right]$$
$$+ \alpha_3\left[(m_2 + m_3 - \gamma_I m_2 m_3 \alpha_3) + m_1\frac{1-\gamma_I m_3 \alpha_3}{1-\gamma m_1 \alpha_3}\right]$$
$$\left[E_2 \sin\sqrt{\alpha_3}\,(t-\tau) + F_2 \cos\sqrt{\alpha_3}\,(t-\tau)\right]$$
$$+ \frac{(P-R)\,m_4}{m_1+m_2+m_3+m_4}.$$

Hierin bestimmen sich α_1, α_2, α_3 als die Wurzeln der kubischen Gleichung

(105)
$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 - \alpha\,[\gamma m_1 (m_2 + m_3 + m_4)$$
$$+ \gamma_I (m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + \gamma_l m_4 (m_1 + m_2 + m_3)]$$
$$+ \alpha^2\,[\gamma \gamma_I m_1 m_2 (m_3 + m_4) + \gamma_I \gamma_l m_3 m_4 (m_1 + m_2)$$
$$+ \gamma_l \gamma m_1 m_4 (m_2 + m_3)] - \alpha^3 \gamma \gamma_I \gamma_l m_1 m_2 m_3 m_4 = 0,$$

deren allgemeine Lösung sehr umständlich ist. Sie wird deshalb nur für bestimmte Zahlenwerte gelöst, am einfachsten in der Weise, dass man durch Probieren[1]) eine der Wurzeln bestimmt und dann durch Dividieren mit dem so erhaltenen Wurzelfaktor die Gleichung auf eine solche zweiten Grades zurückführt. τ ergibt sich aus Gl. (47).

Damit sind nur noch die Unbekannten A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2 zu bestimmen. Zur Erzielung eines möglichst einfachen Wertes für dieselben wird, wie früher, in den Gleichungen (d), (e), (f) für K, K_I, K_l t durch $t-\tau$ ersetzt. Die dann vorhandenen Gleichungen geben mit den obigen Beziehungen unmittelbar die Gleichungen (102), (103) und (104).

[1]) Etwa mit Hilfe der Hornerschen Methode.

Die Konstanten A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2 bestimmen sich aus der Erwägung, dass für $t - \tau = 0$ sein muss

$$K = R, \quad K_I = 0, \quad K_i = 0 \tag{106}$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{\gamma}\frac{ds_1}{dt} = \sqrt{\frac{R(2P-R)}{m_1\gamma}}, \quad \frac{dK_I}{dt} = 0, \quad \frac{dK_i}{dt} = 0. \tag{107}$$

Man erhält damit zwei Systeme mit je 3 Gleichungen und je 3 Unbekannten.

Allgemeine Schlüsse lassen sich aus den erhaltenen Gleichungen nicht ziehen wegen ihrer unvollendeten Form. Immerhin kann aber festgestellt werden, dass die in jedem elastischen Glied vorhandenen Schwingungen sich aus 3 Grundschwingungen zusammensetzen, die sich je nach ihrer gegenseitigen Lage und Stärke verschieden beeinflussen und von denen jede in den beiden andern Gliedern eine zugeordnete Grundschwingung von gleicher Schwingungszahl hat.

Fünfter Abschnitt.

Beispiele.

Um von den Ergebnissen der vorigen Abschnitte eine zahlenmässige Vorstellung zu erhalten, untersuchen wir die behandelten Vorgänge an einem 30 t-Laufkran von 21,34 m Stützweite[1]) (gefertigt von der Duisburger Maschinenbau-A.-G. vorm. Bechem & Keetmann) (s. Fig. 18 bis 22) und zwar für sämtliche drei Bewegungsarten, nämlich Lastheben, Katzen- und Bühnenfahrt. Dabei legen wir eine Anlaufszeit von 4 Sekunden zugrunde.[2]) Es muss jedoch im Auge behalten werden, dass die Grösse der Anlaufszeit in erster Linie von dem Verhalten des Kranführers abhängt. Die Fig. 10 S. 31 gibt ein Urteil darüber, in welcher Weise sich die Anstrengung des Triebwerks mit der Anlaufszeit ändert.

Bei gleichförmiger Beschleunigung verlangen 4 Sekunden Anlaufszeit eine Winkelbeschleunigung der Motorwelle von

$$\frac{d w_m}{d t} = \frac{w_m}{4} = \frac{\pi n}{30 . 4} = \frac{\pi n}{120}, \tag{108}$$

wenn n die am Ende des Anlaufs vorhandene Umdrehungszahl der Motorwelle in der Minute bedeutet.

1. Lastwinde.

Der Hubmotor leistet 30 PS bei 450 Uml./Min. und arbeitet auf ein dreifaches Zahnrädervorgelege mit den Übersetzungen 24 : 120, 24 : 72, 15 : 60, an welches ein fünfrolliger Flaschenzug mit 6 tra-

---

[1]) S. Bericht von Ad. Ernst über die Industrie- und Gewerbeausstellung in Düsseldorf 1902 in der Zeitschr. des Vereines deutscher Ingenieure 1902, S. 1549, dem die Figuren 18 bis 21 entnommen sind.

[2]) Kammerer (s. Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure 1901, S. 19) nimmt bei seinen Rechnungen überall 2 Sekunden Anlaufszeit, also die doppelten Massenwiderstände an, als 4 Sekunden entsprechen.

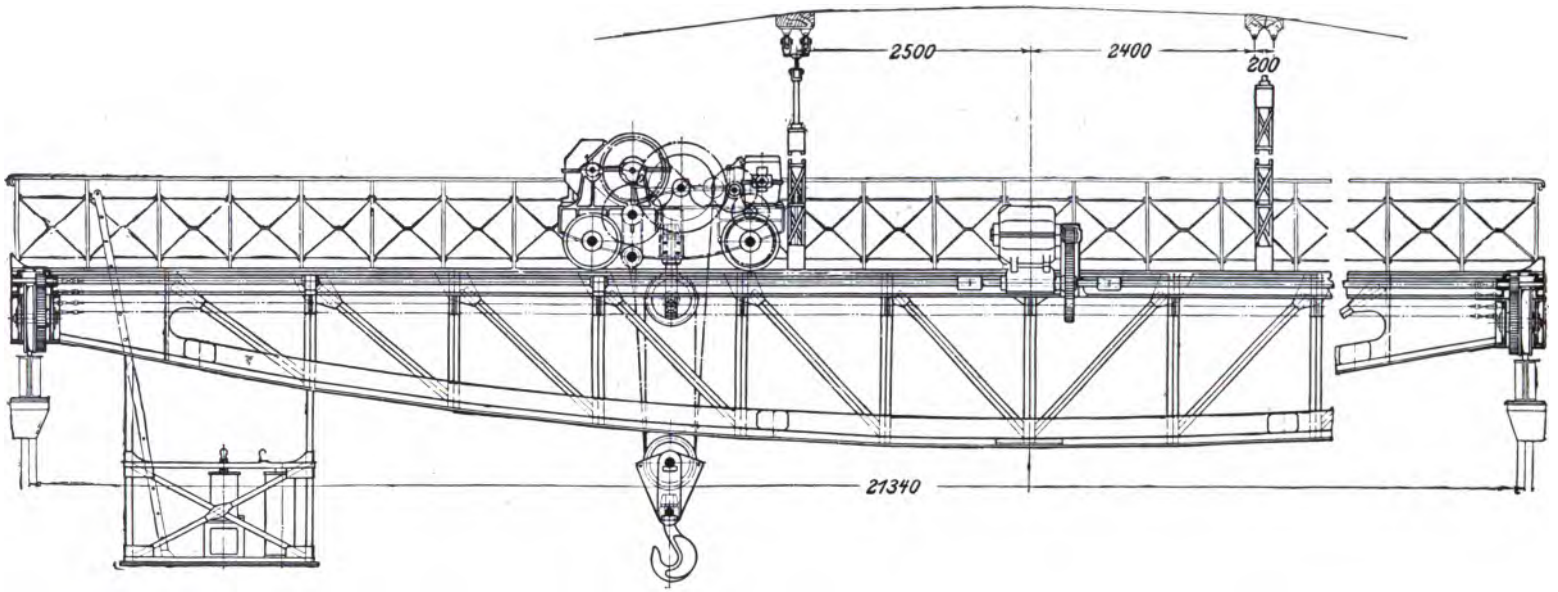

Fig. 18.

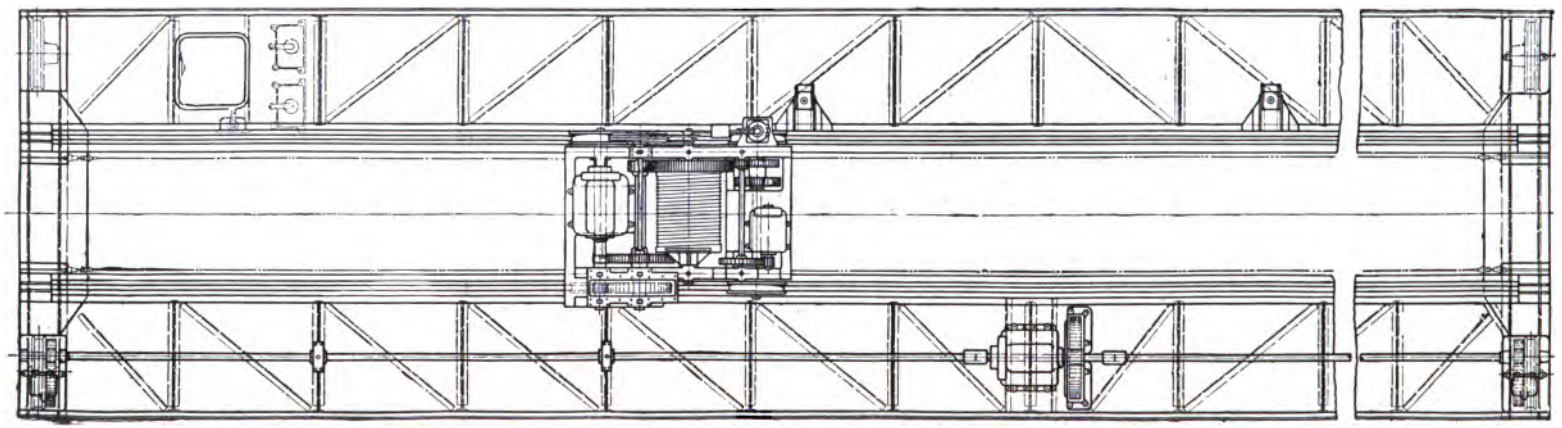

Fig. 19.

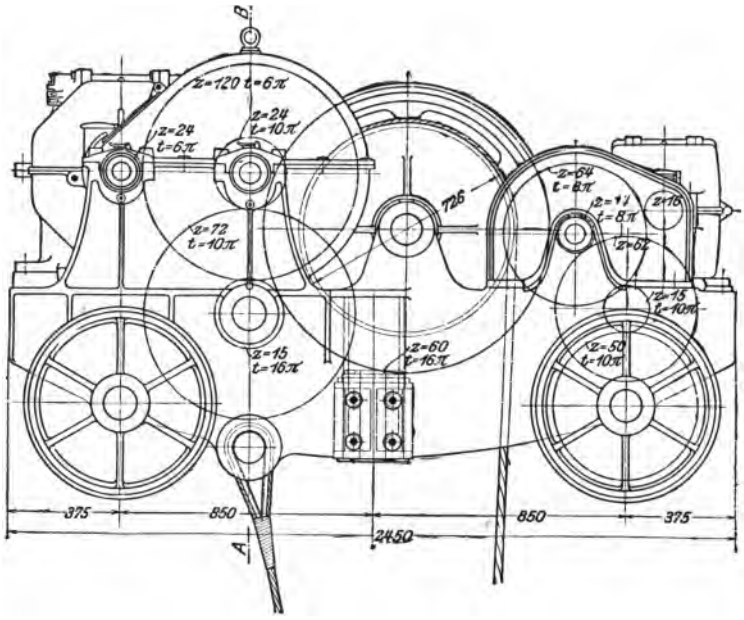
z=120 t=6π
z=24 t=6π
z=24 t=10π
z=72 t=10π
z=15 t=16π
z=60 t=16π
726
z=64 t=8π
z=11 t=8π
z=16
z=82
z=15 t=10π
z=50 t=10π
375
850
2450
850
375
A

Fig. 20.

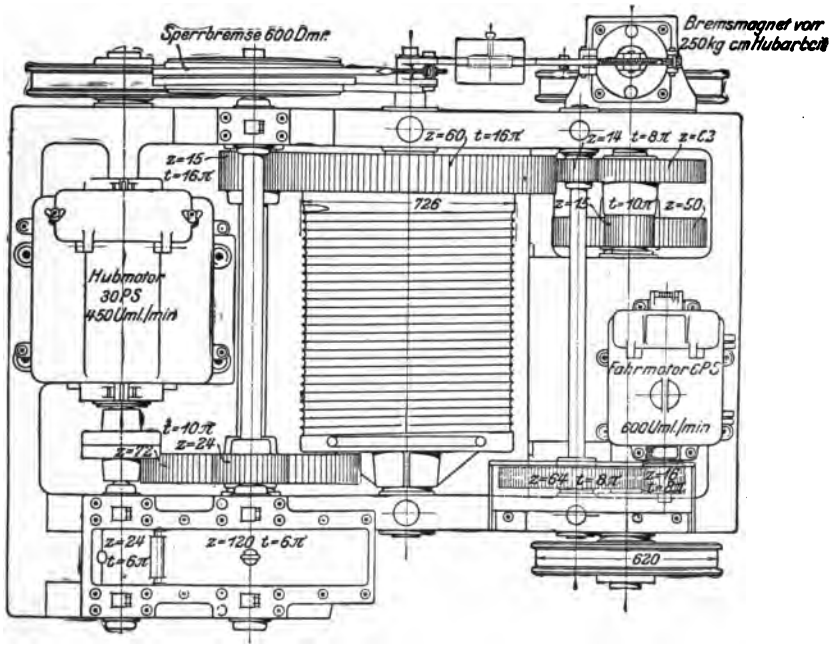
Sperrbremse 600 Dmr.
Bremsmagnet vorr
250kg cm Hubarbeit
z=60, t=16π
z=14 t=8π z=63
z=15 t=16π
726
z=15 t=10π z=50,
Hubmotor
30 PS
450 Uml./min
Fahrmotor 6 PS
600 Uml./min
t=10π
z=24
z=72
z=24 t=6π
z=120 t=6π
620

Fig. 21.

genden Seilsträngen angeschlossen ist. Der Durchmesser der Trommel beträgt 726 m/m.

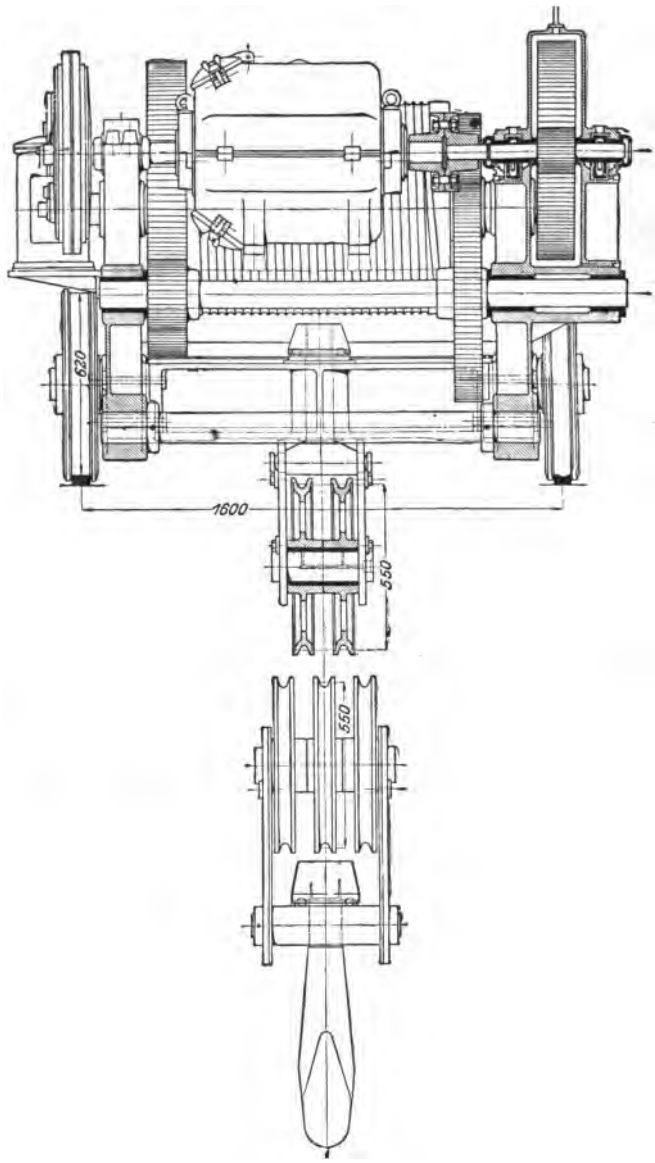

Fig. 22.

Zunächst werden in der folgenden Tabelle die auf die Motorwelle reduzierten Trägheitsmomente der beim Anlauf in Bewegung kommenden Massen berechnet.

Bezeichnung	Daten zur Rechnung	Trägheitsmoment bezw. Masse kgcm	kg/cm	berechnet nach	Wirkungsgrad bis zu dem betrachteten Triebwerkteil	Übersetzung bis zu dem betrachteten Triebwerkteil	Reduz. Trägheitsm. Gl. (11) kgcm
1	2	3		4	5	6	7
Anker [1])	—	~ 70			0,98	1	71
Scheibenkupplg.	Dmr. = 26 cm	2,35			0,98	1	2,4
Motorritzel	$t = 0{,}6\,\pi$ $z = 24$ $\psi = 6{,}6$	0,4		Gl.(14)	0,98	1	0,4
Rad des 1. Vorgeleges	$t = 0{,}6\,\pi$ $z = 120$ $\psi = 6{,}6$	48,03		Gl.(21)	0,98 . 0,91 = 0,89	$\frac{1}{5}$	2,16
Ritzel des 2. Vorgeleges	$t = \pi$ $z = 24$ $\psi = 3$	2,4		Gl.(15)	0,89	$\frac{1}{5}$	0,11
Bremsrad, berechnet als Zahnrad	$t = \pi$ $z = 60$ $\psi = 3{,}2$	37,44		Gl.(21)	0,89	$\frac{1}{5}$	1,68
Rad des 2. Vorgeleges	$t = \pi$ $z = 72$ $\psi = 3$	65,6		Gl.(22)	0,89 . 0,91 = 0,81	$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$	0,36
Ritzel des 3. Vorgeleges	$t = 1{,}6\,\pi$ $z = 15$ $\psi = 2{,}6$	3,3		Gl.(15)	0,81	$\frac{1}{15}$	0,02
Rad an der Trommel	$t = 1{,}6\,\pi$ $z = 60$ $\psi = 2{,}6$	346,0		Gl.(22)	0,81 . 0,90 = 0,73	$\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{60}$	0,13
Trommel	Länge = 88 cm Dmr. = 70 cm	484			0,73	$\frac{1}{60}$	0,18
Drahtseil auf der Trommel und bis zur 2. Rolle	Länge ~ 20 m Gew./lfd. m = 1,49 kg	40			0,73	$\frac{1}{60}$	0,02
Rollen	s. Fussbem. [2]) Dmr. = 55 cm		0,061	Gl.(29)	0,73 . 0,93 = 0,68	$\frac{1}{60} \cdot 36{,}3$ = 0,605	0,033
Rollenseil	$q = 1{,}49$ $l = 9$		0,016	Gl.(31)	0,68	0,605	0,009
Last samt Totlast	30500 kg		31,09		0,68 . 0,9 = 0,61	0,605 . $\frac{1}{6}$ = 0,101	0,53

[1]) Das Trägheitsmoment eines Motorankers kann einwandfrei nur durch den Versuch (Pendelversuch) bestimmt werden. Die hier angegebenen Zahlenwerte sind durch Rechnung festgestellte Näherungswerte.

[2]) Das Trägheitsmoment einer Rolle, als die Summe der Trägheitsmomente von Nabe, Wand und Kranz berechnet, ergab sich zu 0,8 + 6,10 + 21,3 = 28,2 kgcm. Damit wird die Masse der Rolle, reduziert auf die Seilmitte, $m_r = \frac{28{,}2}{\left(\frac{55}{2}\right)^2} = 0{,}037$ kg/cm. Da die Trommel die letzte Rolle des Flaschen-

Die Zahlen in Spalte 7 geben ein Bild von dem Einfluss der vorhandenen Massen. Wie man sieht, überwiegen die Massen auf der Motorwelle und die des ersten Vorgeleges die übrigen, sogar die der Last bedeutend. Der Massenwiderstand letzterer ist $\frac{0{,}53}{71} \cdot 100 = 0{,}75\,\%$ von dem des Motorankers und der des Rollenzugs sogar nur $\frac{0{,}033 + 0{,}009}{71} \cdot 100 = 0{,}06\,\%$ desselben. Hieraus ist ersichtlich, dass ein geringer Massenwiderstand in erster Linie durch Verringerung der Massen in der Nähe des Motors zu erreichen ist, dass es aber zwecklos ist, die durch die Konstruktionsverhältnisse gegebenen Massen der letzten Vorgelege klein halten zu wollen.

Das reduzierte Trägheitsmoment sämtlicher Massen erhält man als die Summe der Zahlen in Spalte 7. Es ergibt sich rund 79 kgcm. Da nun die Winkelbeschleunigung der Motorwelle [siehe Gl. (108)]

$$\frac{d\,w_m}{d\,t} = \frac{\pi \,.\, 450}{120} = 11{,}8,$$

so wird das zur Massenbeschleunigung erforderliche Moment

$$M_m = 11{,}8 \,.\, 79 = 932 \text{ kgcm.}$$

Das Gewicht der Last beansprucht das Moment

$$M_r = 30\,500 \; \frac{0{,}101}{0{,}61} = 5\,050 \text{ kgcm.}$$

Die Hubbewegung beginne bei frei schwebender Last. Die Solenoidbremse löse sich in dem Moment, wo die vom Motor an das Bremsrad gelangende Kraft ausreicht, um die Last frei schwebend zu erhalten. Bei Untersuchung der dynamischen Vorgänge hat man zwischen den vor und hinter der Bremsscheibe liegenden Triebwerkteilen zu unterscheiden. Die Triebwerkteile hinter der Bremse waren im Ruhezustand schon belastet. Beim Anlauf steigert sich die Anstrengung nur durch den Widerstand der Massen und den weiteren Umstand, dass die Reibungswiderstände des Triebwerks jetzt im entgegengesetzten Sinne wirken. Die Triebwerkteile vor der Bremse waren vor Beginn der Bewegung in spannungslosem Zustande. Beim Anlauf werden sie auf den dem Widerstand der Massen und dem Gewicht der Last entsprechenden Wert belastet. Die entstehenden

---

zugs darstellt, ist in Gl. (29) $n = 6$ zu setzen. Der sich ergebende Wert wird berichtigt, indem man m_r abzieht. Für $\varkappa$ wurde 1,04 gesetzt. Als reduzierte Masse der Rollen ergab sich aus Gl. (29) $m_\varrho = 0{,}098$, somit beträgt die reduzierte Masse der vorhandenen 5 Rollen 0,098 — 0,037 = 0,061 kg/cm.

Schwingungen werden sich also hier stärker als hinter der Bremse ausbilden und es genügt zur Klarlegung des Einflusses derselben, nur die Triebwerkteile vor der Bremse ins Auge zu fassen. Der Einfachheit halber beziehen wir die Vorgänge wieder auf den Radius 1 cm der Motorwelle, so dass die dort wirkend gedachten Kräfte dargestellt sind durch die Momente, die reduzierten Massen durch die Trägheitsmomente und die Beschleunigung durch die Winkelbeschleunigung. Als Massen vor dem elastischen Glied, das vorwiegend durch die Motorwelle dargestellt ist, sind die des Motorankers und der Kupplung aufzufassen

$$m_1 = 71 + 2{,}4 = 73{,}4 \text{ kg/cm}$$

und demnach als Massen hinter dem elastischen Glied

$$m_2 = 79 - 73{,}4 = 5{,}6 \text{ kg/cm}.$$

Die am Radius 1 cm wirkende Triebkraft beträgt

$$P = M_r + M_m = 5050 + 932 = 5982 \text{ kg},$$

der zur Überwindung des Arbeitswiderstandes nötige Betrag

$$R = M_r = 5050 \text{ kg},$$

und die mittlere Beschleunigung

$$p_m = \frac{d w_m}{dt} = 11{,}8.$$

Die periodisch sich einstellenden Grenzwerte des die Motorwelle beanspruchenden Momentes ergeben sich damit aus Gl. (61) S. 30

$$\left.\begin{matrix} K_{max} \\ K_{min} \end{matrix}\right\} = 5050 + 11{,}8 \cdot 5{,}6 \pm \sqrt{(5050 + 11{,}8 \cdot 5{,}6)^2 - 5050^2 \frac{73{,}4}{79}}$$

$$= 5116 \pm 1574 = \left\{\begin{matrix} 6690 \text{ kgcm} \\ 3542 \text{ kgcm}. \end{matrix}\right.$$

Gegenüber der Anstrengung im Beharrungszustande ist also das grösste Moment grösser um

$$6690 - 5050 = 1640 \text{ kgcm oder } \frac{1640}{5050} 100 = 32{,}5\,\%.$$

Man sieht, dass bei Hubwinden der verhältnismässig günstigen Massenverteilung halber (m_2 klein gegenüber m_1) die Anlaufperiode im allgemeinen gefährliche Mehranstrengungen des Triebwerks nicht mit sich bringt. Hierbei ist aber vorausgesetzt, dass die Bremse sich rechtzeitig löst. Erfolgt die Lösung der Bremse sehr spät, so stösst die Motormasse zunächst auf den Widerstand der Bremse. Dies entspricht in Gl. (56) S. 28 dem Fall $m_2 = \infty$, womit sich ergibt

$$K_{max} = 2P = 11\,964 \text{ kgcm}.$$

Man sieht, dass durch spätes Öffnen der Bremse die Schwingungen sich bedeutend verstärken.

2. Katzenfahrwerk.

Der Katzenfahrmotor leistet bei 600 Uml./Min. 6 PS und arbeitet ebenfalls mit dreifachem Stirnrädervorgelege. Die einzelnen Übersetzungen sind: 16:64, 14:62 und 15:50. Der Laufraddurchmesser beträgt 620 m/m.

Die Berechnung der auf die Motorwelle reduzierten Trägheitsmomente der vorhandenen Massen geschieht wieder tabellarisch.

Bezeichnung	Daten zur Rechnung	Trägheitsmoment bezw. Masse kgcm kg/cm	berechnet nach	Wirkungsgrad bis zu dem betrachteten Triebwerkteil	Übersetzung bis zu dem betrachteten Triebwerkteil	Reduz. Trägheitsm. Gl. (11) kgcm
1	2	3	4	5	6	7
Anker	—	$\sim 1{,}5$		0,98	1	$\sim 1{,}50$
Motorritzel	$t = 0{,}8\,\pi$ $z = 16$ $\psi = 4$	0,19	Gl.(14)	0,98	1	0,19
Rad des 1. Vorgeleges	$t = 0{,}8\,\pi$ $z = 64$ $\psi = 2{,}8$	13,03	Gl.(21)	$0{,}98 \cdot 0{,}91 = 0{,}89$	$\frac{1}{4}$	0,92
Ritzel des 2. Vorgeleges	$t = 0{,}8\,\pi$ $z = 14$ $\psi = 3$	0,10	Gl.(15)	0,89	$\frac{1}{4}$	0,01
Rad des 2. Vorgeleges	$t = 0{,}8\,\pi$ $z = 62$ $\psi = 3$	13,76	Gl.(22)	$0{,}89 \cdot 0{,}91 = 0{,}81$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{14}{62} = \frac{7}{124}$	0,05
Ritzel des 3. Vorgeleges	$t = \pi$ $z = 15$ $\psi = 3$	0,37	Gl.(15)	0,81	$\frac{7}{124}$	—
Verbindungsstück	—	0,37		0,81	$\frac{7}{124}$	—
Rad des 3. Vorgeleges	$t = \pi$ $z = 50$ $\psi = 3$	22,03	Gl.(22)	$0{,}81 \cdot 0{,}90 = 0{,}73$	$\frac{7}{124} \cdot \frac{15}{30} = \frac{21}{1240}$	0,01
4 Laufräder	Dmr. = 62 cm	480		0,73	$\frac{21}{1240}$	0,19
Katze	Gewicht = 8300 kg	8,461		0,73	$\frac{21}{1240} \cdot 31 = 0{,}525$	3,19
Last	30000 kg	30,581		0,73	0,525	11,55

Die Zahlen der Spalte 7 lassen erkennen, dass die Massen der Zahnräder geringen Einfluss besitzen gegenüber den Massen des Motors, der Katze und Last. Bei praktischen Rechnungen kann man sich also die Berücksichtigung der Triebwerkmassen ersparen.

1. Anlauf der Katze ohne Last.

Um von den beim Anfahren der belasteten Katze eintretenden Pendelbewegungen der Last absehen zu können und zur Untersuchung solche Verhältnisse zu haben, wie sie den im Abschnitt II dargelegten Vorgängen zugrunde gelegt sind, wird zunächst der Anlauf der unbelasteten Katze behandelt.

Zur Bestimmung des Fahrwiderstandes dient die Gleichung

$$\mathfrak{M}_r = \mathfrak{G}\left(f + \mu\frac{d}{2}\right), \tag{109}$$

worin $\mathfrak{G}$ das gesamte, zu bewegende Gewicht in kg,
f der Koeffizient der wälzenden Reibung in cm,
μ der Zapfenreibungskoeffizient,
d der Durchmesser der Lagerzapfen in cm.

Mit $\mathfrak{G} = 8300$, $f = 0{,}05$, $\mu = 0{,}08$, $d = 10{,}5$ ergibt sich also

$$\mathfrak{M}_r = 8300\left(0{,}05 + 0{,}08 \cdot \frac{10{,}5}{2}\right) = 3901 \text{ kgcm},$$

welcher Wert bei Annahme des Falles der Spurkranzreibung doppelt zu nehmen ist. Diesen ungünstigen Fall angenommen, hat man zur Überwindung des Fahrwiderstands ein Antriebmoment nötig von

$$R = M_r = 2 \cdot 3901 \cdot \frac{21}{1240} \cdot \frac{1}{0{,}78} = 181 \text{ kgcm}.$$

Das reduzierte Trägheitsmoment sämtlicher in Bewegung kommender Massen findet sich aus Spalte 7 zu 6,06 kgcm. Da nun die der Anlaufszeit von 4 Sekunden entsprechende Winkelbeschleunigung der Motorwelle

$$p_m = \frac{d\,w_m}{d\,t} = \frac{\pi\,600}{4 \,.\, 30} = 15{,}7,$$

so ergibt sich als das zur Massenbeschleunigung erforderliche Moment

$$M_m = 15{,}7 \,.\, 6{,}06 = 95 \text{ kgcm}.$$

Das Antriebmoment beträgt also insgesamt

$$P = M_r + M_m = 276 \text{ kgcm}.$$

Die auf den Radius 1 cm der Motorwelle reduzierten Werte der vor und hinter den beiden elastischen Wellen liegenden Massen betragen nach Spalte 7

$$m_1 = 1{,}50 + 0{,}19 + 0{,}92 + 0{,}01 + 0{,}05 = 2{,}67 \text{ kg/cm}$$
$$m_2 = 0{,}01 + 0{,}19 + 3{,}19 \qquad\qquad = 3{,}39 \text{ —}.$$

Der grösste und der kleinste Wert der Anstrengung der beiden Wellen ergibt sich nun aus Gl. (61) S. 30 unmittelbar zu

$$\left.\begin{matrix} K_{max} \\ K_{min} \end{matrix}\right\} = 181 + 15{,}7 \cdot 3{,}39 \pm \sqrt{(181+15{,}7\cdot 3{,}39)^2 - 181^2 \frac{2{,}67}{2{,}67+3{,}39}}$$

$$= 234 \pm 201 = \begin{cases} 435 \text{ kgcm Antriebmoment} \\ 33 \quad \text{„} \qquad \text{„} \end{cases}.$$

Die Schwingungen steigern die Anstrengung des Triebwerks also auf das $\frac{435}{181} = 2{,}4$fache der im Beharrungszustand vorhandenen.

Um ein Bild von den sich abspielenden Vorgängen zu erhalten, werden im folgenden die Verhältnisse eingehender klargelegt. Die auftretenden Schwingungen werden erzeugt durch die Nachgiebigkeit der ersten Vorgelegewelle und der treibenden Laufradwelle, die man als ein zusammenhängendes elastisches Glied betrachten kann. Der Nachgiebigkeitsgrad der ersten Vorgelegewelle ergibt sich, da das vom Drehmoment beanspruchte Stück 100 cm lang und 5 cm stark ist, mit $\beta = \frac{1}{850\,000}$ aus Gl. (36) S. 17 zu

$$\gamma_1 = \frac{32 \cdot 100 \cdot r^2}{3{,}14 \cdot 850000 \cdot 5^4} = \frac{r^2}{521300}$$

und dessen auf die Motorwelle reduzierter Wert nach Gl. (40) S. 19, wenn man zugleich bedenkt, dass $r = 1$ cm zu setzen ist, zu

$$\gamma_1 \cdot 16 \cdot 0{,}89 = \frac{1}{36610}.$$

Die Laufradwelle erhält das drehende Moment durch das in der Mitte derselben aufgekeilte Zahnrad zugeführt; auf jede Wellenhälfte entfällt also das halbe Drehmoment. Die erzeugte Verdrehung würde dem ganzen Drehmoment entsprechen, wenn von einer Wellenhälfte nur die halbe Länge, also im ganzen nur der vierte Teil der Laufradwelle in Rechnung gezogen wird. Die ganze in Betracht kommende Länge derselben beträgt rund 150 cm, ihr Durchmesser ist 10,5 cm. Die vorhandene Nachgiebigkeit beträgt also nach Gl. (36)

$$\gamma_2 = \frac{32 \cdot \frac{150}{4} \cdot r^2}{3{,}14 \cdot 850000 \cdot 10{,}5^4} = \frac{r^2}{27034700}$$

und deren auf die Motorwelle reduzierter Wert nach Gl. (40) mit $r = 1$ cm

$$\gamma_2 \cdot \left(\frac{1240}{21}\right)^2 \cdot 0{,}73 = \frac{1}{10620}.$$

Als Nachgiebigkeitsgrad des ganzen Triebwerks ergibt sich also

$$\gamma = \frac{1}{36610} + \frac{1}{10620} = \frac{1}{8232}.$$

Beim Anlauf kommt der Kranwagen erst in Bewegung, wenn die Verdrehung der beiden Wellen den zur Überwindung des Fahrwiderstandes notwendigen Betrag erreicht hat.

Dies ist nach Gl. (47) S. 23 der Fall nach Verlauf von

$$\tau = \sqrt{\frac{2{,}67}{8232}}\ arc\ cos\ \frac{276 - 181}{276} = 0{,}022 \text{ Sek.}$$

Bis dahin ändert sich entsprechend Gl. (45) S. 22 die Anstrengung des Triebwerks nach dem Gesetze

$$K = 276\ (1 - cos\ 55{,}5\ t).$$

Kommt nun die Katze in Bewegung, so geht dieses Gesetz entsprechend Gl. (55) S. 28 über in das folgende

$$K = 234 - 201\ cos\ (74{,}2\ t - 0{,}308).$$

Der Verlauf der Beanspruchung ist in Fig. 23 aufgezeichnet.

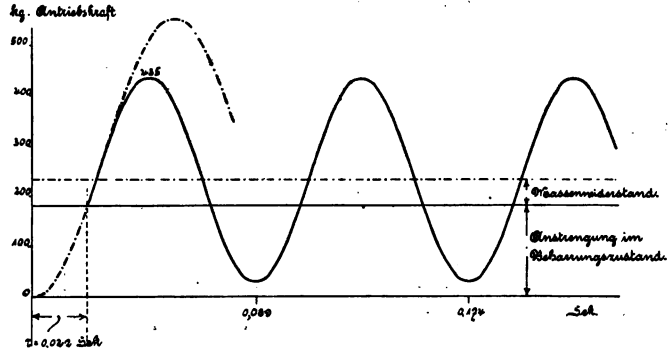

Fig. 23. Anlauf der Katze ohne Last. Anstrengung des Fahrwerks.

Die Schwingungsdauer dieser Schwingungen beträgt

$$\mathfrak{T} = \frac{2\pi}{74{,}2} = 0{,}085 \text{ Sek.},$$

in der Sekunde treten also $\frac{1}{0{,}085} = \sim 12$ Perioden ein.

Die grösste und kleinste Winkelbeschleunigung des Motorankers beträgt nach Gl. (65) S. 32

$$15{,}7 \pm \frac{201}{2{,}67} = 15{,}7 \pm 75{,}3 \doteq \begin{cases} 91{,}0 \\ -59{,}6 \end{cases}$$

und die Grenzwerte der Beschleunigung der Katze nach Gl. (66),

wobei mit der Übersetzung $\frac{21}{1240} \cdot 31$ multipliziert werden muss

$$\frac{21}{1240} \cdot 31 \left(15{,}7 \pm \frac{201}{3{,}39}\right) = 8{,}24 \pm 31{,}14 = \begin{cases} 39{,}38 \text{ cm Sek.} \\ -22{,}90 \text{ —.} \end{cases}$$

Man sieht, dass sich Motoranker und Katze in weitgehenden Grenzen beschleunigen und verzögern.

2. Anlauf der Katze mit der Maximallast von 30 t.

Hier treten sowohl die Schwingungen der Triebwerkmassen als auch die Pendelbewegungen der Last einflussnehmend auf.

Der Fahrwiderstand beträgt [s. Gl. (109)]

$$(30000 + 8300)\,(0{,}05 + 0{,}08\,\tfrac{10{,}5}{2}) = 18001 \text{ kgcm},$$

somit das zur Überwindung desselben nötige Moment

$$18001 \cdot \frac{21}{1240}\,\frac{1}{0{,}78} = 418 \text{ kgcm},$$

dem für den Fall, dass noch Spurkranzreibung vorliegt, der doppelte Betrag, also

$$R = M_r = 2 \cdot 418 = 836 \text{ kgcm}$$

entspricht.

Der auf die Motorwelle reduzierte Wert der vorhandenen Massen ergibt sich als die Summe der Zahlen in Spalte 7 der Tabelle S. 66 zu 17,61 kgcm, so dass das zur Massenbeschleunigung erforderliche Moment beträgt

$$M_m = 15{,}7 \cdot 17{,}61 = 276 \text{ kgcm}.$$

Das gesamte Antriebmoment beträgt also

$$P = M_r + M_m = 836 + 276 = 1112 \text{ kgcm}.$$

Mit $l = 1{,}0$ m erhält man nach Gl. (99) S. 53 den folgenden Wert für den reduzierten Nachgiebigkeitsgrad des durch die Aufhängung der Last dargestellten Pendels

$$\gamma_l = \frac{100}{11{,}55 \cdot 981} = \frac{1}{113}.$$

Im Abschnitt IV § 2 ist darauf hingewiesen, dass die hier auftretenden dynamischen Vorgänge genau den im Abschnitt III § 2 behandelten entsprechen. Es werden deshalb die Verhältnisse nach den dort entwickelten Gleichungen untersucht, indem überall für γ_1 der Wert $\gamma_l = \frac{1}{113}$ und für m_3 der Wert der reduzierten Masse der Last, d. h. $m_3 = 11{,}55$ gesetzt wird.

Solange die Formänderung im Triebwerk den zur Überwindung des Fahrwiderstands notwendigen Betrag nicht erreicht hat, bleibt

die Katze und die Last in Ruhe und die Anstrengung des Triebwerks ändert sich nach dem Gesetze [s. Gl. (45)]

$$K = 1112\ (1 - \cos\ 55{,}5\ t).$$

Dieser Zustand dauert gemäss Gl. (47) S. 23

$$\tau = \sqrt{\frac{2{,}67}{8232}}\ \operatorname{arc\,cos}\frac{1112-836}{1112} = 0{,}023 \text{ Sek.}$$

Ist diese Zeit verstrichen, so beginnen Katze und Last sich zu bewegen und das Gesetz der Beanspruchung des Triebwerks ergibt sich aus den Gleichungen (85) bis (87) S. 44 bis 47. Da

$$\left.\begin{matrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{matrix}\right\} = \frac{\frac{2{,}67\,(3{,}39+11{,}55)}{8232} + \frac{11{,}55\,(2{,}67+3{,}39)}{113} \pm \sqrt{\left[\frac{2{,}67\,(3{,}39+11{,}55)}{8232} - \frac{11{,}55\,(2{,}67+3{,}39)}{113}\right]^2 + \frac{4\,.\,2{,}67^2\,.\,11{,}55^2}{8232\,.\,113}}}{2\,.\,\frac{2{,}67\,.\,3{,}39\,.\,11{,}55}{8232\,.\,113}}$$

$$= \frac{0{,}6242 \pm 0{,}6179}{0{,}0002248} = \left\{\begin{matrix}5525\\ 28\end{matrix}\right.,$$

somit $\sqrt{\alpha_1} = 74{,}3, \quad \sqrt{\alpha_2} = 5{,}3,$

und da ferner

$$a = \frac{\left(1-\frac{2{,}67\,.\,28}{8232}\right)\left(1-\frac{11{,}55\,.\,5525}{113}\right)}{74{,}3\left(5525-28\right)\left(\frac{2{,}67}{8232}-\frac{11{,}55}{113}\right)}\sqrt{\frac{1112\,(2\,.\,1112-836)}{2{,}67\,\cdot\,\frac{1}{8232}}} = 925{,}8$$

$$b = \frac{\left[\left(3{,}39+11{,}55\right)\left(1-\frac{2{,}67\,.\,28}{8232}\right)+2{,}67\left(1-\frac{11{,}55\,.\,28}{113}\right)\right]\left(1-\frac{11{,}55\,.\,5525}{113}\right)}{17{,}61\left(5525-28\right)\left(\frac{2{,}67}{8232}-\frac{11{,}55}{113}\right)}\,276 = 155{,}2$$

$$c = \frac{\left(1-\frac{2{,}61\,.\,5525}{8232}\right)\left(1-\frac{11{,}55\,.\,28}{113}\right)}{5{,}3\left(5525-28\right)\left(\frac{2{,}67}{8232}-\frac{11{,}55}{113}\right)}\sqrt{\frac{1112\,(2\,.\,1112-836)}{2{,}67\,\cdot\,\frac{1}{8232}}} = -34{,}2$$

$$d = \frac{\left[\left(3{,}39+11{,}55\right)\left(1-\frac{2{,}67\,.\,5525}{8232}\right)+2{,}67\left(1-\frac{11{,}55\,.\,5525}{113}\right)\right]\left(1-\frac{11{,}55\,.\,28}{113}\right)}{17{,}61\left(5525-28\right)\left(\frac{2{,}67}{8232}-\frac{11{,}55}{113}\right)}\,276 = -79{,}1.$$

Setzt man diese Werte in die Gl. (91) S. 49 unter Beachtung des zu der Gleichung Bemerkten ein, so ergibt sich als Gesetz der Anstrengung des Katzenfahrwerks

$$K = 1070{,}2 - 938{,}7\ \cos\ (74{,}3\ t - 0{,}371) - 86{,}2\ \cos\ (5{,}3\ t + 0{,}28).$$

In Fig. 24 ist der Verlauf der Anstrengung aufgezeichnet. Daraus erhält man als Grösstwert

$$K_{max} = \sim 2000 \text{ kgcm Antriebmoment,}$$

entsprechend der $\frac{2000}{836}$ = rund 2,4 fachen Anstrengung des Beharrungszustandes.

Die jeweilige Beschleunigungskraft K_I der Last nach Gl. (88) und (89) S. 47 zu bestimmen, bietet keine Schwierigkeit, ist aber ohne Interesse, weshalb nicht darauf eingegangen wird.

Die Untersuchung der Schwingungen bei Vernachlässigung der Nachgiebigkeit des Lastseils führt mit

$$m_2 = 3{,}39 + 11{,}55 = 14{,}94$$

nach Gl. (61) S. 30 zu folgendem Grösstwert der Anstrengung

$$K_{max} = 836 + 15{,}7 \cdot 14{,}94 + \sqrt{(836 + 15{,}7 \cdot 14{,}94)^2 - 836^2 \frac{2{,}67}{2{,}67 + 14{,}94}}$$

$$= 2089 \text{ kgcm Antriebmoment.}$$

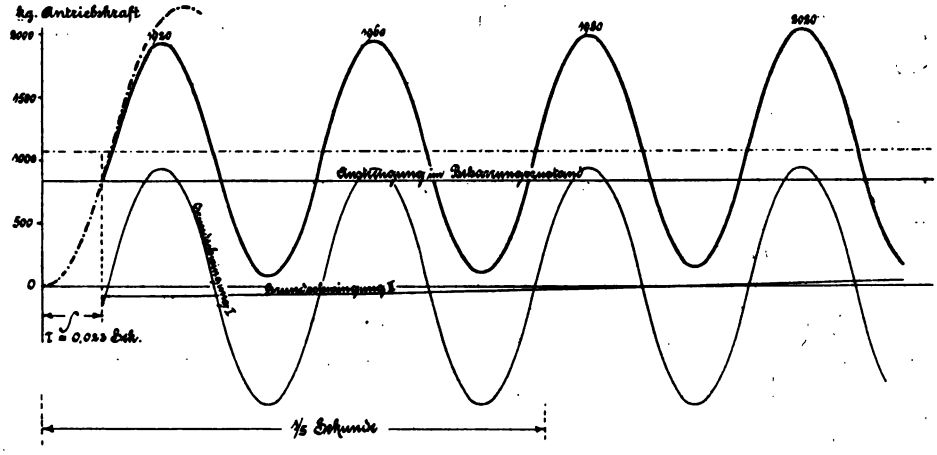

Fig. 24. Anlauf der vollbelasteten Katze. Anstrengung des Fahrwerks.

Dieser Wert, der dem Zustand starrer Verbindung zwischen Katze und Last entspricht, unterscheidet sich nur wenig von dem den tatsächlichen Verhältnissen entsprechenden, oben erhaltenen Wert 2000. Da nun die ganze Rechnungsweise überhaupt nur zu Näherungswerten führt, so ist die einfache Gleichung (61) vollständig ausreichend genau und den umständlichen Gleichungen (85) bis (89) entschieden vorzuziehen. Hierbei wird bei praktischen Rechnungen noch weiterhin benützt, dass für m_1 und m_2 die Werte der reduzierten Massen des Motorankers bezw. der Katze und Last genügen, so dass die Triebwerkmassen völlig unberücksichtigt bleiben können. Im vorliegenden Fall ergibt sich z. B. mit $m_1 = 1{,}5$, $m_2 = 14{,}74$

$$K_{max} = 836 + 15{,}7 \cdot 14{,}74 + \sqrt{(836 + 15{,}7 \cdot 14{,}74)^2 - 836^2 \frac{1{,}5}{16{,}24}}$$

$$= 1067 + 1039 = 2106 \text{ kgcm Antriebmoment.}$$

Der Vergleich mit den oben erhaltenen Werten ergibt gute Übereinstimmung.

Die Durchführung der Rechnung für andere Stellungen der Last bestätigt auch dort diese Beobachtung. Damit scheint ein für praktische Zwecke geeignetes Verfahren gefunden zu sein. (Siehe die Zusammenfassung S. 81 u. f.)

3. Bühnenfahrwerk.

Das Bühnenfahrwerk besitzt nur doppeltes Vorgelege mit den Übersetzungen 14:70 und 14:60. Die Laufraddurchmesser betragen 720 m/m. Der Motor leistet bei 600 Uml./Min. 30 PS. Die Bühne ist als Fachwerkträger konstruiert.

Die Berechnung der auf die Motorachse reduzierten Trägheitsmomente der beim Anlauf in Bewegung kommenden Massen geschieht wieder tabellarisch.

Bezeichnung	Daten zur Rechnung	Trägheitsmoment bezw. Masse kgcm kg/cm	berechnet nach	Wirkungsgrad bis zu dem betrachteten Triebwerkteil	Übersetzung bis zu dem betrachteten Triebwerkteil	Reduz. Trägheitsm. Gl. (11) kgcm
1	2	3	4	5	6	7
Anker	—	~ 50		0,98	1	~ 51
Motorritzel	$t = 1{,}2\,\pi$ $z = 14$ $\psi = 3{,}2$	0,75	Gl.(15)	0,98	1	0,77
Rad des 1. Vorgeleges	$t = 1{,}2\,\pi$ $z = 70$ $\psi = 3$	138,7	Gl.(21)	0,98 . 0,91 = 0,89	$\frac{1}{5}$	6,23
2 Sellersche Kupplungen	Gewicht = 31 kg Dmr. = 18 cm	2,5		0,89	$\frac{1}{5}$	0,11
Vorgelegewelle	$d = 7$ cm $l = 2150$	4,06	[1])	0,89	$\frac{1}{5}$	0,18
Beide Ritzel des 2. Vorgeleges	$t = 1{,}2\,\pi$ $z = 14$ $\psi = 2{,}5$	1,17	Gl.(15)	0,89	$\frac{1}{5}$	0,05
Beide Räder des 2. Vorgeleges	$t = 1{,}2\,\pi$ $z = 60$ $\psi = 2{,}5$	157,9	Gl.(22)	0,89 . 0,90 = 0,80	$\frac{1}{5} \cdot \frac{14}{60} = \frac{14}{300}$	0,43
4 Laufräder	Dmr. = 72 cm	600		0,80	$\frac{14}{300}$	1,63
Bühne mit Fahrwerk und Motor	Gewicht = 24850 kg	25,33		0,80	$\frac{14}{300} \cdot 36 = 1{,}68$	89,37
Katze	Gewicht = 8300 kg	8,46		0,80	1,68	29,86
Last	30000 kg	30,58		0,80	1,68	107,95

[1]) Eine Welle vom Durchmesser d und der Länge l hat das Trägheitsmoment $l \frac{d^4 \pi}{32} \cdot \frac{\gamma}{g}$, wo $\gamma = 0{,}00786$ kg/ccm (s. Fussbemerkung S. 9).

Auch hier ist der geringe Einfluss der Triebwerkmassen aus den Zahlen in Spalte 7 klar ersichtlich.

1) Anlauf der unbelasteten Bühne.

Die dynamischen Vorgänge entsprechen den im Abschnitt III § 2 behandelten.

Bei einer Anlaufszeit von 4 Sekunden beträgt die Winkelbeschleunigung der Motorwelle

$$\frac{d\,w_m}{d\,t} = p_m = \frac{\pi \cdot 600}{120} = 15{,}7,$$

zu deren Erzeugung, da das reduzierte Trägheitsmoment sämtlicher in Bewegung kommender Massen (ohne Last) aus Spalte 7 sich zu 179,63 kgcm ergibt, das folgende Antriebmoment nötig ist

$$M_m = 15{,}7 \cdot 179{,}63 = 2820 \text{ kgcm}.$$

Mit $\mathfrak{G} = 33150$ kg, $f = 0{,}05$ cm, $\mu = 0{,}08$, $d = 10$ cm gibt Gl. (109) den Fahrwiderstand

$$\mathfrak{M}_r = 33150 \left(0{,}05 + 0{,}08 \cdot \frac{10}{2}\right) = 14918 \text{ kgcm}.$$

Für den Fall, dass noch Spurkranzreibung vorliegt, ist zur Überwindung dieses Widerstandes das folgende Antriebmoment erforderlich

$$M_r = R = 2 \cdot 14918 \cdot \frac{14}{300} \cdot \frac{1}{0{,}80} = 1740 \text{ kgcm}.$$

Das gesamte notwendige Antriebmoment beträgt also

$$P = M_m + M_r = 4560 \text{ kgcm}.$$

Die reduzierte Masse der vor der elastischen Vorgelegewelle liegenden Triebwerkteile samt der halben Vorgelegewelle beträgt nach Spalte 7

$$m_1 = 58{,}2.$$

Die hinter der Vorgelegewelle liegenden, aber an den Eigenschwingungen der Bühne nicht teilnehmenden Massen sind die übrigen Triebwerkteile und ein Teil der Bühne. Letzterer sei schätzungsweise die Hälfte der Bühne; damit ergibt sich

$$m_2 = 2{,}20 + \frac{89{,}37}{2} = 46{,}89.$$

Die an den Eigenschwingungen der Bühne teilnehmenden Massen sind die der anderen Hälfte der Bühne und der Katze,

$$m_3 = \frac{89{,}37}{2} + 29{,}86 = 74{,}54.$$

Der Nachgiebigkeitsgrad des Fahrtriebwerks ist mit grosser Annäherung gleich dem der Vorgelegewelle. Der vom Drehmoment

beanspruchte Teil derselben ist $l = 21{,}2$ m lang und $d = 7$ cm stark. Da der Eintritt des Drehmoments in der Wellenmitte erfolgt, so ist wie früher (s. S. 68) nur der vierte Teil der Wellenlänge in Rechnung zu nehmen. Es ergibt sich damit als Nachgiebigkeitsgrad der Vorgelegewelle nach Gl. (36) S. 17 mit $\beta = \frac{1}{850000}$

$$\gamma_1 = \frac{32 \cdot \frac{21{,}2}{4} \cdot r^2}{850000 \cdot \pi \cdot 7^4} = \frac{r^2}{378000}$$

und somit dessen auf die Motorwelle reduzierter Wert mit $r = 1$

$$\gamma = \frac{1}{378000} \frac{0{,}98 \cdot 0{,}91}{\left(\frac{14}{70}\right)^2} = \frac{1}{17000}.$$

Der Nachgiebigkeitsgrad der Bühne wird durch den direkten Versuch bestimmt (s. S. 47 und 48). Er ist verschieden je nach der Stellung der Katze. Wir nehmen an, der Versuch habe ergeben

$$\gamma_I m_8 = \gamma m_1 = \frac{58{,}2}{17000},$$

$$\gamma_I = \frac{58{,}2}{17000 \cdot 74{,}54} = \frac{1}{21770}.$$ [1])

Die Gleichheit von γm_1 und $\gamma_I m_8$ schliesst den Fall der Resonanz in sich, der mit den für diesen besonderen Fall entwickelten Gleichungen (96) und (97) S. 50 untersucht wird. Nach

$$\tau = \sqrt{\frac{58{,}2}{17000}} \, arc\, cos \, \frac{4560 - 1740}{4560} = 0{,}0529 \text{ Sek.}$$

beginnt die Bühne sich zu bewegen. Ehe dies eintritt, nimmt die Anstrengung der Bühne zu entsprechend

$$M_k = 4560 \, (1 - cos \, 17{,}09 \, t).$$

Nach $\tau = 0{,}0529$ Sekunden geht dieses Gesetz über in das folgende

$$M_k = 3646 - 865 \, cos \, (33{,}45 \, t - 0{,}581) - 2561 \, cos \, 17{,}09 \, t$$

und die Beanspruchung der Bühne durch Massenkräfte beträgt

$$M_{kI} = 1170 + 1108 \, cos \, (33{,}45 \, t - 0{,}581) - 2561 \, cos \, 17{,}09 \, t$$

ausgedrückt in kgcm Antriebmoment. Umgerechnet in kg Biegungskraft findet sich für letztere

$$W_{kI} = \frac{0{,}80}{1{,}68} M_{kI} = 557 + 528 \, cos \, (33{,}45 \, t - 0{,}581) - 1220 \, cos \, 17{,}09 \, t.$$

[1]) Die Grösse des reduzierten Nachgiebigkeitsgrads der Bühne ist fast ohne Einfluss auf die maximale Beanspruchung des Triebwerks, wie vom Verfasser durchgeführte Rechnungen zeigen. Dagegen wechselt die Anstrengung der Bühne bei verschiedenen Werten von γ_I sehr beträchtlich. Der für γ_I oben angenommene Wert, der dem Fall der Resonanz entspricht, scheint die grössten Anstrengungen der Bühne zur Folge zu haben, denn schon geringe Abweichungen geben bedeutend niederere Werte.

Ein anschauliches Bild der Beanspruchung des Triebwerks gibt die Fig. 25. Man sieht, dass die im Beharrungszustand vorhandene Beanspruchung mehrfach überschritten wird, dass aber infolge des wechselnden Einflusses der beiden Grundschwingungen die einzelnen Maximalwerte unter sich nicht gleich, sondern z. B. im vorliegenden Falle im Steigen begriffen sind. Von diesen Grösstwerten kann natürlich nur der erste oder zweite noch in Betracht kommen, weil dämpfende Einflüsse die übrigen nicht mehr in vollem Masse entstehen lassen. Man hätte somit als Maximalwert zu nehmen (s. Fig. 25)

$$M_{k\max} = 6200 \text{ kgcm Antriebmoment.}$$

Dabei ist aber zu beachten, dass bei einer andern Stellung der Katze sich der Koeffizient γ_I und damit auch die gegenseitige

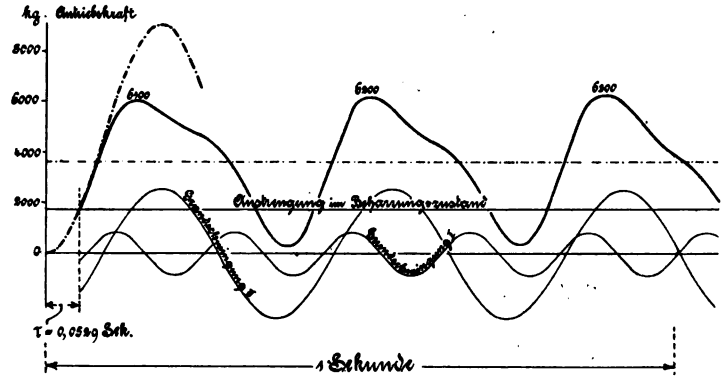

Fig. 25. Anlauf der unbelasteten Bühne. Anstrengung des Fahrwerks.

Lage der beiden Grundschwingungen ändert und dass sich dann infolgedessen auch ein anderer erster Maximalwert einstellt. Die Gleichung für M_k lässt als grössten Maximalwert zu

$$M_{k\max} = 3646 + 865 + 2561 = 7072 \text{ kgcm Antriebmoment,}$$

mit dessen tatsächlichem Zustandekommen nach Ansicht des Verfassers gerechnet werden muss.

Sieht man von der Elastizität der Bühne ab und vernachlässigt die Masse des Triebwerks gegen die des Motors und der Bühne samt Katze, so erhält man aus Gl. (61) S. 30 mit

$$m_1 = 51, \quad m_2 = 89{,}37 + 29{,}86 = 119{,}23$$

$$K_{\max} = M_{k\max} = 1740 + 15{,}7 \,.\, 119{,}23 + \sqrt{(1740 + 15{,}7 \,.\, 119{,}23)^2 - 1740^2 \frac{51}{51 + 119{,}23}}$$

$$= 3612 + 3484$$

$$= 7096 \text{ kgcm Antriebmoment,}$$

ein Wert, der um $\frac{7096-6200}{6200}\cdot 100 = 14{,}5\,\%$ grösser ist, als der vorliegende tatsächliche Maximalwert, aber mit dem in Rechnung zu nehmenden Betrag 7072 kgcm sehr gut übereinstimmt.

2) Anlauf der vollbelasteten Bühne.

Das gesamte auf die Motorwelle reduzierte Trägheitsmoment der vorhandenen Massen ist gleich der Summe der Zahlen in Spalte 7 S. 73 und beträgt 287,6 kgcm. Damit ergibt sich als das zur Beschleunigung der Massen nötige Antriebmoment

$$M_m = 287{,}6 \,.\, 15{,}7 = 4515 \text{ kgcm.}$$

Als Fahrwiderstand liefert Gl. (109) S. 67 für den Fall der Spurkranzreibung

$$\mathfrak{M}_r = 2 \,.\, 63150 \left(0{,}05 + 0{,}08 \cdot \frac{10}{2}\right) = 56836 \text{ kgcm.}$$

Somit wird das zu dessen Überwindung erforderliche Antriebmoment

$$R = M_r = 56836 \,\frac{14}{300}\,\frac{1}{0{,}80} = 3315 \text{ kgcm.}$$

Das gesamte, vom Motor auszuübende Moment beträgt also

$$P = M_m + M_r = 7830 \text{ kgcm.}$$

Ferner ist (s. S. 74 und 75, Spalte 7 S. 73)

$$m_1 = 58{,}2 \quad m_2 = 46{,}89, \quad m_3 = 74{,}54, \quad m_4 = \sim 108,$$

$$\gamma = \frac{1}{17000}, \qquad \gamma_1 = \frac{1}{21770}.$$

Wählt man die reduzierte Pendellänge der Last zu $l = 100$ cm, so erhält man als Nachgiebigkeitsgrad dieses Pendels nach Gl. (99) S. 53

$$\gamma_l = \frac{100}{108 \,.\, 981} = \frac{1}{1060}.$$

Nach Gl. (47) S. 23 kommen Bühne und Last erst in Bewegung, nachdem die Motormassen

$$\tau = \sqrt{\frac{58{,}2}{17000}}\; arc\,cos\; \frac{7830-3315}{7830} = 0{,}05595 \text{ Sek.}$$

angelaufen sind. Während dieser Zeit wächst die Anstrengung des Fahrwerks nach dem Gesetze [s. Gl. (45) S. 22]

$$M_k = 7830 \;(1 - cos\; 17{,}09\; t).$$

Sind sämtliche Massen in Bewegung, so ergeben sich die Anstrengung des Fahrtriebwerks und der Bühne und die jeweilige Beschleunigungskraft der Last aus den Gleichungen (102) bis (104) S. 56 bis 57.

Hierin bestimmen sich die Werte α_1, α_2, α_3 als Wurzeln der kubischen Gleichung (105) S. 57, die in unserem Falle lautet

$$287{,}6 - 19{,}968\,\alpha + 0{,}08037\,\alpha^2 - 0{,}00005599\,\alpha^3 = 0$$

oder

$$\alpha^3 - 1435\,\alpha^2 + 356630\,\alpha - 5136000 = 0;$$

mit Hilfe der Hornerschen Methode ergibt sich

$$\alpha_1 = 1121, \qquad \alpha_2 = 299, \qquad \alpha_3 = 15{,}3,$$

woraus

$$\sqrt{\alpha_1} = 33{,}48, \quad \sqrt{\alpha_2} = 17{,}28, \quad \sqrt{\alpha_3} = 3{,}91.$$

Damit geben die Gleichungen (102), (103), (104)

$$K =$$
$$-\ 22990\,[A_2\,sin\,(33{,}48\,t - 1{,}873) + B_2\,cos\,(33{,}48\,t - 1{,}873)]$$
$$-\ 737370\,[C_2\,sin\,(17{,}28\,t - 0{,}9667) + D_2\,cos\,(17{,}28\,t - 0{,}9667)]$$
$$+\ 940\,[E_2\,sin\,(3{,}91\,t - 0{,}2187) + F_2\,cos\,(3{,}91\,t - 0{,}2187)]$$
$$+\ 6917,$$

$$K_I =$$
$$29570\,[A_2\,sin\,(33{,}48\,t - 1{,}873) + B_2\,cos\,(33{,}48\,t - 1{,}873)]$$
$$-\ 723330\,[C_2\,sin\,(17{,}28\,t - 0{,}9667) + D_2\,cos\,(17{,}28\,t - 0{,}9667)]$$
$$+\ 1657\,[E_2\,sin\,(3{,}91\,t - 0{,}2187) + F_2\,cos\,(3{,}91\,t - 0{,}2187)]$$
$$+\ 2866,$$

$$K_t =$$
$$-\ 360\,[A_2\,sin\,(33{,}48\,t - 1{,}873) + B_2\,cos\,(33{,}48\,t - 1{,}873)]$$
$$+\ 39360\,[C_2\,sin\,(17{,}28\,t - 0{,}9667) + D_2\,cos\,(17{,}28\,t - 0{,}9667)]$$
$$+\ 2710\,[E_2\,sin\,(3{,}91\,t - 0{,}2187) + F_2\,cos\,(3{,}91\,t - 0{,}2187)]$$
$$+\ 1695,$$

worin noch die unbekannten Integrationskonstanten A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2 enthalten sind. Zu deren Bestimmung benützt man die Gleichungen (106) und (107).

Erstere ergeben

$$3315 = -\ 22990\,B_2 - 737370\,D_2 + 940\,F_2 + 6917$$
$$0 = 29570\,B_2 - 723330\,D_2 + 1657\,F_2 + 2866$$
$$0 = -\ 360\,B_2 + 39360\,D_2 + 2710\,F_2 + 1695,$$

woraus

$$B_2 = 0{,}02226, \quad D_2 = 0{,}003335, \quad F_2 = -\ 0{,}6702.$$

Die Gleichungen (107) ergeben

$$109340 = -\ 22990 \,.\, 33{,}48\,A_2 - 737370 \,.\, 17{,}28\,C_2 + 940 \,.\, 3{,}91\,E_2$$
$$0 = 29570 \,.\, 33{,}48\,A_2 - 723330 \,.\, 17{,}28\,C_2 + 1657 \,.\, 3{,}91\,E_2$$
$$0 = -\ 360 \,.\, 33{,}48\,A_2 + 39360 \,.\, 17{,}28\,C_2 + 2710 \,.\, 3{,}91\,E_2,$$

woraus

$$A_2 = -\ 0{,}06185, \quad C_2 = -\ 0{,}004777, \quad E_2 = 0{,}2362.$$

Damit

$$K = M_k = 1422\,sin\,(33{,}48\,t - 1{,}873) - 512\,cos\,(33{,}48\,t - 1{,}873)$$
$$+ 3522\,sin\,(17{,}28\,t - 0{,}9667) - 2459\,cos\,(17{,}28\,t - 0{,}9667)$$
$$+ 222\,sin\,(3{,}91\,t - 0{,}2187) - 631\,cos\,(3{,}91\,t - 0{,}2187)$$
$$+ 6917,$$

ferner

$$K_I = M_{kI} =$$
$$- 1829\,sin\,(33{,}48\,t - 1{,}873) + 658\,cos\,(33{,}48\,t - 1{,}873)$$
$$+ 3455\,sin\,(17{,}28\,t - 0{,}9667) - 2412\,cos\,(17{,}28\,t - 0{,}9667)$$
$$+ 391\,sin\,(3{,}91\,t - 0{,}2187) - 1112\,cos\,(3{,}91\,t - 0{,}2187)$$
$$+ 2866.$$

Führt man noch die S. 27 für die ähnlich lautende Gleichung (52) angegebene Umformung hier durch, so ergibt sich als Anstrengung des Triebwerks nach t Sekunden Anlaufszeit ausgedrückt in kgcm Antriebmoment

$$M_k = 6917 - 1511\,cos\,(33{,}48\,t - 0{,}648) - 4295\,cos\,(17{,}28\,t - 0{,}006)$$
$$- 669\,cos\,(3{,}91\,t + 0{,}051)$$

und ebenso für die Anstrengung der Bühne durch horizontale Massenkräfte

$$M_{kI} = 2866 + 1944\,cos\,(33{,}48\,t - 0{,}648) - 4214\,cos\,(17{,}28\,t - 0{,}006)$$
$$- 1179\,cos\,(3{,}91\,t + 0{,}051).$$

Der jeweilige Wert der die Bühne belastenden Massenkräfte in kg ergibt sich hieraus zu

$$W_k = \frac{0{,}8}{1{,}68} M_{kI} = 1365 + 926\,cos\,(33{,}48\,t - 0{,}648)$$
$$- 2007\,cos\,(17{,}28\,t - 0{,}006) - 561\,cos\,(3{,}91\,t + 0{,}051).$$

Die Figuren 26 und 27 geben ein anschauliches Bild von den im Triebwerk und der Bühne stattfindenden Schwankungen der Anstrengung. Die negativen Werte in Fig. 27 beweisen, dass die Bühne sich auch in der Fahrrichtung durchbiegt.

Als Grösstwert der Anstrengung des Triebwerks ergibt sich (s. Fig. 26)

$$M_{k\,max} = 12\,750 \text{ kgcm Antriebmoment,}$$

also das $\frac{12750}{3315} = 3{,}85$ fache der Anstrengung im Beharrungszustande. Allerdings stellt sich wegen der zufälligen, günstigen gegenseitigen Lage der Grundschwingungen dieser Maximalwert erst mit der 3. Amplitude ein, wo jedenfalls tatsächlich schon eine bedeutende Dämpfung stattgefunden hat. Jedoch ist das schon früher Bemerkte zu beachten, dass mit jeder Stellung der Katze und der Last sich die gegenseitige Lage der Grundschwingungen ändert

und somit auch mit dem früheren Auftreten des grössten Wertes gerechnet werden muss.

Auf angenäherte Weise unter Vernachlässigung der Nach-

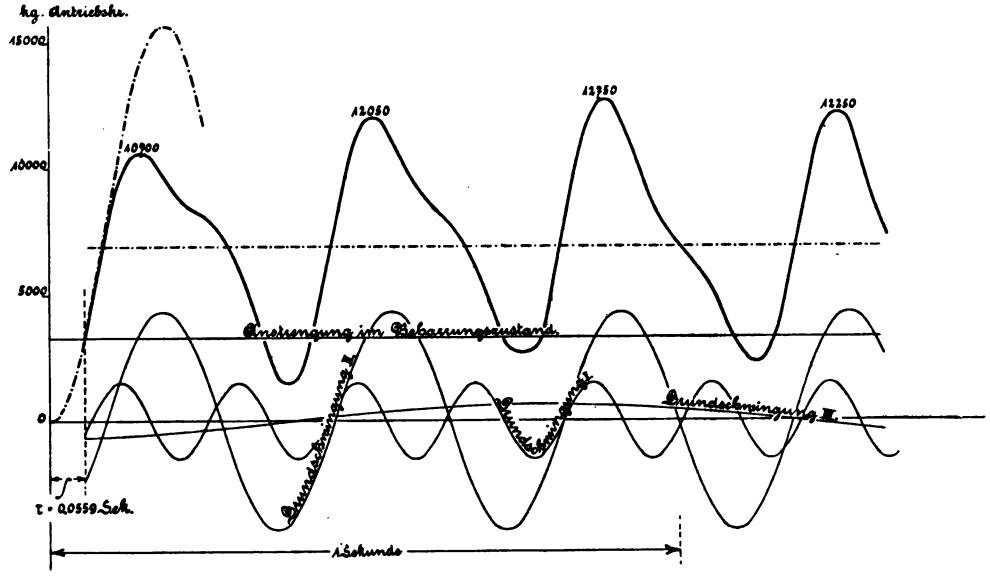

Fig. 26. Anlauf der vollbelasteten Bühne. Anstrengung des Fahrwerks.

giebigkeit der Bühne und des Lastseils berechnet, erhält man für die grösste Anstrengung des Triebwerks nach Gl. (61) S. 30, wenn für m_1

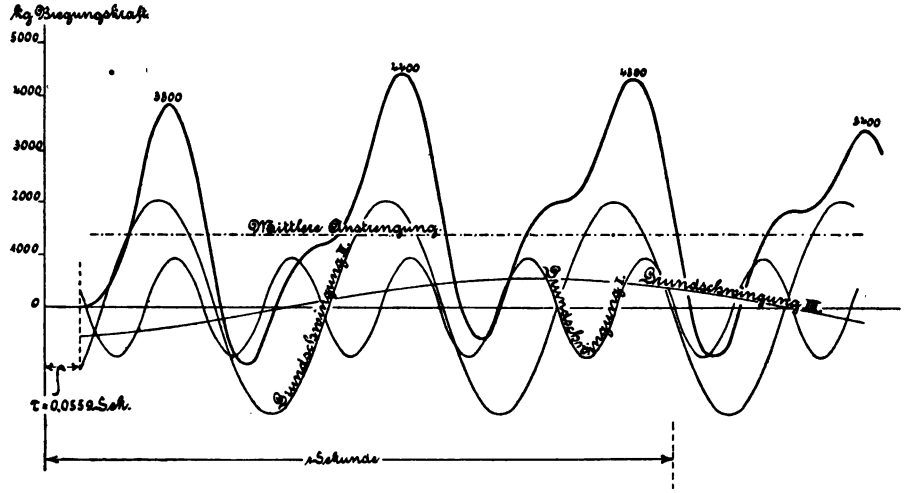

Fig. 27. Anlauf der vollbelasteten Bühne. Anstrengung der Bühne durch Massenkräfte.

nur das Trägheitsmoment des Motorankers und für m_2 die Summe der Trägheitsmomente von Bühne, Katze und Last, d. h.

$m_1 = 51$, $m_2 = 89{,}37 + 29{,}86 + 107{,}95 = 227{,}18$

gesetzt wird

$$M_{k\,max} = 3315 + 15{,}7 \,.\, 227{,}18 + \sqrt{(3315 + 15{,}7 \,.\, 227{,}18)^2 - 3315^2 \frac{51}{51 + 227{,}18}}$$

$$= 6882 + 6734 = 13616 \text{ kgcm Antriebmoment.}$$

Die Abweichung von dem genauen Wert beträgt

$$\frac{13616 - 12750}{12750} 100 = 6{,}8\,\%$$

und liegt noch innerhalb der anzunehmenden Fehlergrenze.

Aus der Kurve Fig. 27 ergibt sich als grösster Wert der die Bühne belastenden Massenkräfte

$$W_{k\,max} = 4400 \text{ kg.}$$

Die Belastung der Bühne in horizontaler Richtung steigt also auf mehr als 4 *t*.

Zusammenfassung.

Die berechneten Zahlenbeispiele lassen erkennen,

1. dass beim Anlauf einer Maschine infolge der auftretenden Schwingungen stets grössere Anstrengungen des Triebwerks und des Gerüstes sich einstellen, als den vorhandenen Arbeits- und Massenwiderständen entsprechen,
2. dass bei Fahrtriebwerken die Anstrengung beim Anlauf stets ein Vielfaches der im Beharrungszustand vorhandenen beträgt,
3. dass auch bei Fahrwerken mit frei hängender Last und nachgiebigem Gerüste (einschliesslich Drehkranen) die Berechnung des grössten Wertes der Anstrengung nach der Gleichung

$$(61) \quad K_{max} = R + p_m m_2 + \sqrt{(R + p_m m_2)^2 - R^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2}}$$

stets zu Werten führt, die annähernd mit den durch Rechnung nach den genauen Gleichungen erhaltenen übereinstimmen und die Anstrengung eher als zu gross ergeben, was ja im Sinne der praktischen Rechnungen liegt.

Die Gl. (61) gibt das Gesetz für die grösste Anstrengung eines Triebwerks allgemeiner Art beim Anlauf an. Für die Anwendung der Gleichung auf Fahrwerke (also Laufkrane, Strassenbahnwagen, überhaupt elektrisch betriebene Transportvorrichtungen jeder Art) wird die Rechnung bequemer, wenn man die Gleichung (61) auf den Radius 1 cm der Laufradwelle und nicht der Motorwelle bezieht.

Bezeichnet

$\mathfrak{G}$ das gesamte zu bewegende Gewicht in kg,

f den Koeffizienten der wälzenden Reibung in cm,
μ den Zapfenreibungskoeffizienten,
d den Durchmesser der Lagerzapfen in cm,
$\mathfrak{M}_r$ das zum Drehen der Laufradwelle erforderliche Moment in kgcm,
T die Anlaufzeit in Sekunden,
V die Endgeschwindigkeit des Wagens in cm/Sek.,
D den Durchmesser der Laufräder in cm,
i die gesamte Übersetzung des Fahrwerks, d. h. das Verhältnis der Umlaufzahlen von Laufradwelle und Motorwelle,
η den Wirkungsgrad des Fahrwerks,
$g = 981$ cm die Erdbeschleunigung,
Θ_1 das Trägheitsmoment des Motorankers[1]) in bezug auf seine Achse in kgcm,
so setzen wir in Gl. (61) an die Stelle von
R das zur Überwindung des Fahrwiderstands erforderliche Moment, das sich aus der bekannten Beziehung

$$\mathfrak{M}_r = \mathfrak{G}\left(f + \mu\,\frac{d}{2}\right) \tag{109}$$

bestimmt,
p_m die Winkelbeschleunigung der Laufräder, d. h. den Ausdruck $\frac{V}{T \cdot \frac{D}{2}}$,
m_2 das Trägheitsmoment von $\mathfrak{G}$ in bezug auf die Laufradachse, d. h. den Wert $\frac{\mathfrak{G}}{g}\left(\frac{D}{2}\right)^2$,
m_1 den auf die Laufradwelle reduzierten Wert von Θ_1, d. h. $\Theta_1 \frac{\eta}{i^2}$.

Damit ergibt sich aus Gl. (61) unmittelbar die Gleichung zur Bestimmung des Wertes M_s, den man statt des Fahrwiderstandes $\mathfrak{M}_r$ bei Feststellung der Abmessungen der Triebwerkteile in die Rechnung einzuführen hätte, nämlich

$$M_s = \mathfrak{M}_r + \mathfrak{G}\frac{VD}{2Tg} + \sqrt{\left(\mathfrak{M}_r + \mathfrak{G}\frac{VD}{2Tg}\right)^2 - \frac{\mathfrak{M}_r^2\,\Theta_1}{\Theta_1 + \frac{\mathfrak{G}}{g}\left(\frac{D}{2}\right)^2 \frac{i^2}{\eta}}}. \tag{110}$$

Beispiel. Für das Kranfahrwerk des im Abschnitt I behandelten 30 t Laufkrans ist

$\mathfrak{G} = 30000 + 33150 = 63150$ kg, $V = \sim 105$ cm/Sek.,
$D = 72$ cm, $i = \frac{14}{70} \cdot \frac{14}{60} = \frac{7}{150}$,
$\eta = \sim 0{,}8$, $d = 10$ cm, $\Theta_1 = \sim 50$ cmkg.

[1]) Bei der Anwendung auf Strassenbahnwagen, in denen im allgemeinen zwei Motoren auf das Fahrwerk arbeiten, ist für Θ_1 die Summe der Trägheitsmomente beider Anker zu setzen.

Wählt man nun $f = 0{,}05$, $\mu = 0{,}08$, so ist nach Gl. (109)

$$\mathfrak{M}_r = 63150\left(0{,}05 + 0{,}08 \cdot \frac{10}{2}\right) = 28418 \text{ kgcm.}$$

Bei $T = 4$ Sekunden gibt nun Gl. (110)

$$M_s = 28418 + 63150 \cdot \frac{105 \cdot 72}{2 \cdot 4 \cdot 981} + \sqrt{\left(28418 + 63150 \cdot \frac{105 \cdot 72}{2 \cdot 4 \cdot 981}\right)^2 - \frac{28418^2 \cdot 50}{50 + \frac{63150}{981} \cdot \frac{36^2 \cdot 7^2}{150^2 \cdot 0{,}8}}}$$

$$= 28418 + 60830 + 88430 = 177678 \text{ kgcm.}$$

Der Berechnung der Anstrengung von Fahrwerken wird heute im allgemeinen ein Moment an der Laufradwelle zugrunde gelegt, das man aus dem Moment $\mathfrak{M}_r$ (Gl. 109) durch einen Zuschlag von 50 bis 100% erhält, also im vorliegenden Falle höchstens der Wert $2\,\mathfrak{M}_r = 56\,836$ kgcm. Daraus geht hervor, dass eine Anlaufzeit von 4 Sekunden bei konstantem Antriebmoment das $\frac{177678}{56836}$ = od. 3,1 fache der berechneten Anstrengung zur Folge hat.

Man erkennt, dass kurze Anfahrperioden bei voller Belastung sehr nachteilig sind.

Die Anstrengung der Bühne durch Massenkräfte ist in der im Abschnitt V durchgeführten Weise nach den Gleichungen (102) bis (107) zu ermitteln.

Zur Berechnung der beim Anlauf von Drehkranen stattfindenden Beanspruchung formt man wieder Gl. (61) auf ähnliche Weise um, indem man sämtliche Grössen auf den Radius 1 cm der Drehachse bezieht.

Bezeichnet

$\mathfrak{Q}$ die Last in kg,

Θ_k das Trägheitsmoment des Krangerüstes in bezug auf die Drehachse des Krans in kgcm,

L die Ausladung, d. h. die Entfernung des Aufhängepunkts der Last von der Drehachse in cm,

Θ_1 das Trägheitsmoment des Motorankers in kgcm,

$\mathfrak{M}_r$ das zum Drehen des Krans notwendige Moment,

V die Endgeschwindigkeit des Aufhängepunkts der Last in cm/Sek.,

η den Wirkungsgrad und

i die Übersetzung des Triebwerks, d. h. das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten des Gerüstes und des Motorankers,

so setzen wir in Gl. (61) an die Stelle von

R die Grösse $\mathfrak{M}_r$,

p_m den Mittelwert der Winkelbeschleunigung des Auslegers also den Ausdruck $\frac{V}{T \cdot L}$,

m_2 das Trägheitsmoment des Krans und der Last in bezug auf die Drehachse also den Wert $\Theta_2 = \mathfrak{Q} L^2 + \Theta_k$,

m_1 den auf den Radius 1 cm der Drehachse reduzierten Wert von Θ_1, d. h. $\Theta_1 \frac{\eta}{i^2}$.

Damit erhält man unmittelbar den Ausdruck für das Moment M_s, das man bei statischer Beanspruchung an der Kransäule aufwenden müsste, um die bei Beginn einer Drehbewegung entstehende Beanspruchung des Triebwerks zu erzeugen.

$$(111) \quad M_s = \mathfrak{M}_r + \frac{\Theta_2 V}{TL} + \sqrt{\left(\mathfrak{M}_r + \frac{\Theta_2 V}{TL}\right)^2 - \frac{\mathfrak{M}^2_r \Theta_1}{\Theta_1 + \Theta_2 \frac{i^2}{\eta}}}\,.$$

Hierin bestimmt sich Θ_2 aus

$$(112) \qquad \Theta_2 = \mathfrak{Q} L^2 + \Theta_k.$$

Das Trägheitsmoment Θ_k des Gerüstes (samt Ausrüstung) berechnet sich als die Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Teile. Das Trägheitsmoment der einzelnen Fachwerksstäbe ergibt sich aus Gl. (16a) S. 10 (Vgl. Fig. 2)

$$(16\,a) \qquad \Theta = \frac{G}{3g}(a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2),$$

worin G das Gewicht des Stabes in kg ist.

Zum Schluss sei noch eine Bemerkung über die Herbeiführung der Bruchgefahr durch Schwingungen angefügt.

Die Zerstörung eines Materials setzt eine gewisse Formänderung voraus, zu deren Ausbildung eine bestimmte von der Art des betreffenden Stoffes abhängige Arbeit zu leisten ist. Der Vorgang des Schwingens besteht nun aber darin, dass Massenenergie in Formänderungsarbeit und umgekehrt diese Formänderungsarbeit wieder in Massenenergie umgesetzt wird. Von dieser zu Formänderung verwendeten Arbeit gibt ein Stoff wie Flusseisen nur einen Teil wieder ab, falls er bei deren Aufnahme sehr hoch z. B. bedeutend über die Streckgrenze hinaus beansprucht wurde. Die Schwingungen erfahren in diesem Falle allerdings sofort eine energische Dämpfung, aber eine bleibende Deformation ist entstanden und ein Teil des Arbeitsvermögens des Getriebeelements (z. B. einer Welle) verbraucht. Wiederholen sich diese kräftigen Schwingungen bei einigen weiteren Anlaufperioden, so wächst die Formänderung und erreicht allmählich den zum Bruch erforderlichen Betrag. Hieraus geht klar hervor, dass die beim Anlauf entstehenden Schwingungen den Bruch unbedingt dann früher oder später herbeiführen, wenn sie rechnungsmässig Anstrengungen zur Folge haben, die die Festigkeit des Materials überschreiten.

89088909262

b89088909262a